

CINEMATICA E DINAMICA DEI MECCANISMI A PULEGGIA

M. CAVACECE¹, F. LONDI², P. P. VALENTINI², L. VITA²

¹ *Dipartimento di Ingegneria Industriale, Università degli Studi di Cassino, Cassino*

² *Dipartimento di Ingegneria Meccanica, Università di "Tor Vergata", Roma*

SOMMARIO

Viene qui proposta una nuova metodologia di controllo per i meccanismi a puleggia. L'obiettivo che si cerca di raggiungere attraverso il sistema di controllo è quello di individuare la corretta coppia motrice necessaria affinché gli end-effector descrivano la traiettoria voluta. Un'altra difficoltà in fase di progettazione è l'esigenza di mantenere, in qualsiasi configurazione, le cinghie sempre in tensione in quanto, come è noto, queste sono in grado di trasmettere solo forze di trazione. Per questo motivo, per esempio, il numero di linee di trasmissione, e quindi di cinghie, deve essere superiore al numero di gradi di libertà del sistema in esame. L'algoritmo di controllo deve pertanto essere anche in grado di gestire tale ridondanza di dati. La descrizione della cinematica utilizzata nel presente lavoro ricorre alla corrispondenza tra grafi e meccanismi ed è basata sull'approccio di L.W. Tsai e J.J. Lee [1-4]. Le equazioni della dinamica per un generico manipolatore a n -corpi sono state dedotte attraverso l'approccio Lagrangiano. La procedura di controllo, denominata λ -corrector, è stata implementata in linguaggio Maple V ed i risultati ottenuti confrontati con il *torque rectifier method* di Jacobsen et al. [5].

1. I MECCANISMI A PULEGGIA

1.1. Classificazione

Per quanto concerne la classificazione si fa riferimento ai meccanismi a puleggia inseriti all'interno di manipolatori seriali, sistemi cioè costituiti da n membri collegati in serie da altrettante coppie rotoidali. Per questo motivo il valore di n identificherà il grado di libertà del manipolatore completo, distinguendo fra meccanismo manipolatore e meccanismo a cinghie e puleggie.

Una prima distinzione può essere fatta in base al circuito delle cinghie, definendo a ciclo chiuso quei meccanismi in cui il circuito delle cinghie avvolte intorno alle pulegge sia una linea chiusa; a ciclo aperto nel caso in cui ciò non avvenga. Nella trattazione svolta nel presente articolo si farà riferimento esclusivamente ai meccanismi a ciclo chiuso che sono quelli maggiormente diffusi. Un'ulteriore criterio di classificazione riguarda il numero m di cinghie presenti ed i gradi di libertà n del cinematismo. In base a questo criterio i meccanismi verranno definiti come controllabili o meno a seconda che il numero di cinghie sia rispettivamente superiore o meno ai gradi di libertà. Pertanto si avrà:

- $m < n$. Il numero di cinghie è inferiore al numero di gradi di libertà, il meccanismo sarà allora non completamente governabile.
- $m = n$. Anche in questo caso il manipolatore non è completamente governabile. Ciò è dovuto al fatto che le cinghie possono lavorare solo in trazione e quindi per poter realizzare nel cinematismo un'inversione di moto, per ogni cinghia presente ne deve sempre esistere un'altra che lavori in contrapposizione.
- $m > n$. Nel caso in cui le linee di trasmissione siano disposte in modo opportuno il meccanismo risulta completamente governabile. Al massimo saranno necessarie $m=2n$ cinghie per garantire il controllo di tutti i gradi di libertà.

2. CINEMATICA DEI MECCANISMI A PULEGGIA

Prima di definire le relazioni cinematiche del meccanismo è necessario introdurre alcune delle ipotesi:

- assenza di slittamento tra cinghie e puleggie;
- cinghie inestensibili e prive di peso;
- tutti i membri costituenti il meccanismo sono rigidi;
- le cinghie sono sempre in tensione;
- ciascuna cinghia è avvolta, a partire dal telaio, in maniera continuativa attorno alle pulegge che incontra lungo il suo cammino;
- il meccanismo è completamente governabile ($m > n$);

2.1. Cinematica: equazioni fondamentali

La cinematica del meccanismo a puleggia è governata dalle seguenti relazioni [6]:

$$\begin{aligned} \{s\} &= [A]\{\theta\}; \\ \{\dot{s}\} &= [A]\{\dot{\theta}\}; \\ \{\ddot{s}\} &= [A]\{\ddot{\theta}\}. \end{aligned} \quad (1)$$

dove $\{s\}$ è il vettore di dimensione m relativo agli spostamenti delle cinghie, $[A]$ è la matrice struttura di dimensione $m \times n$ [7] ed infine $\{\theta\}$ è il vettore di dimensione n relativo agli angoli dei membri. Ogni riga della matrice struttura racchiude le informazioni relative a ciascuna delle linee di trasmissione presenti, mentre le colonne indicano il modo in cui sono avvolte le cinghie intorno alle pulegge coassiali ad ognuna delle n cerniere. Il valore assoluto di ciascun termine a_{ij} rappresenta il raggio della puleggia montata sulla j – esima cerniera ed avvolta dalla cinghia i – esima. Il segno dei coefficienti è positivo o negativo a seconda che ad uno spostamento positivo della cinghia corrisponda una rotazione positiva della puleggia o viceversa, rispettivamente. Per meglio comprendere il procedimento si riporta il seguente esempio relativo alla linea di trasmissione in Figura 1. In particolare l'indice i , che va da 0 a n , individuerà i membri, con lo 0 che denota convenzionalmente il telaio; l'indice j , che va da 1 a $n-1$, individuerà le pulegge. Per ogni coppia di pulegge montate sul membro i si definisce la relazione

$$r_j \alpha_{j,i} = \pm r_{j+1} \alpha_{j+1,i} \quad (2)$$

dove $\alpha_{j,i}$ è l'angolo tra la puleggia j ed il membro i . Lo spostamento della cinghia sarà

$$s_h = \pm r_1 \alpha_{1,0} \quad (3)$$

dove

$$\alpha_{1,0} = \alpha_{1,1} + \theta_1 \quad (4)$$

come in Figura 1. Continuando fino alla fine della linea di trasmissione, ed esplicitando il tutto rispetto agli angoli dei membri θ_i , si ottiene

$$s_h = \pm r_1 \theta_1 + \pm r_2 \theta_2 + \dots + \pm r_n \theta_n \quad (5)$$

che espressa in forma matriciale coincide con la prima delle (1).

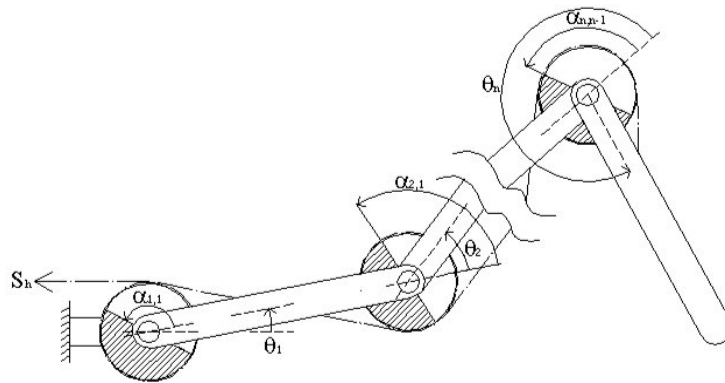


Figura 1: linea di trasmissione

2.2. Dinamica: equazioni dei rotori

La dinamica può essere descritta attraverso la relazione seguente [1]:

$$[J_m] \{\ddot{\theta}_m\} + [C_m] \{\dot{\theta}_m\} = \{\tau_m\} - [R_m] \{\xi\} \quad (6)$$

dove

$\{\theta_m\}$ è la rotazione angolare del rotore;

$[J_m]$ è la matrice contenente i momenti d'inerzia di ciascun rotore;

$[C_m]$ è la matrice diagonale di attrito viscoso dei motori;

$\{\tau_m\}$ è il vettore che contiene le coppie motrici erogate dai motori;

$[R_m]$ è la matrice diagonale contenente i rapporti di riduzione degli ingranaggi che collegano i motori alle pulegge primarie del manipolatore;

$\{\xi\}$ è il vettore delle tensioni esercitate dalle cinghie avvolte intorno alle pulegge.

Di conseguenza il legame tra gli spostamenti delle cinghie e le rotazioni angolari dei motori è fornito dalla relazione

$$\{s\} = [R_m] \{\theta_m\} \quad (7)$$

2.3. Dinamica: equazione di un manipolatore n-link

Per poter definire le equazioni differenziali che governano la dinamica del manipolatore, si fa ricorso alle matrici di Denavit – Hartenberg [8-9] ed all’approccio Lagrangiano [10]. Di conseguenza appare evidente come sia più utile fare riferimento agli angoli tra ciascun membro mobile ed il successivo quali parametri lagrangiani (Figura 1).

Il sistema algebrico differenziale del secondo ordine che così si ottiene è

$$[M(\theta)]\{\ddot{\theta}\} + \{h(\theta, \dot{\theta})\} + \{g(\theta)\} + [C]\{\dot{\theta}\} + [A]^T \{\xi\} = [J]^T \{F\} \quad (8)$$

dove

$[M(\theta)]$ è la matrice di inerzia del sistema;

$\{h(\theta, \dot{\theta})\}$ è il vettore che tiene conto delle accelerazioni centrifughe e di Coriolis;

$\{g(\theta)\}$ è il vettore che tiene conto dell’accelerazione di gravità;

$[C]$ è la matrice che tiene conto dei coefficienti di smorzamento del sistema;

$[J]$ è la matrice Jacobiana del manipolatore rispetto alle coordinate dell’end – effector;

$\{F\}$ è il vettore delle forze esterne.

Gli elementi della matrice $[M(\theta)]$ sono espressi dalla seguente relazione

$$M_{i,k} = \sum_{j=\max(i,k)}^n \text{tr} \left(\frac{\partial [T_j^0]}{\partial \theta_k} [\hat{H}_i] \frac{\partial [T_j^0]}{\partial \theta_i} \right) \quad (9)$$

dove

$[\hat{H}_i]$ è la pseudo matrice di inerzia che si ottiene dall’integrale

$$[\hat{H}_i] = \int_{i\text{-th link}} \{r_{p-i}\} \{r_{p-i}\}^T \rho_i dv \quad (10)$$

in cui ρ_i indica la densità dell’i-esimo membro, $\{r_{p-i}\} = \{x \ y \ z \ 1\}^T$ è il vettore posizione di un generico punto sul i-esimo corpo;

$[T_j^0]$ è la matrice di Denavit Hartenberg per una coppia cilindrica.

E’ utile inoltre sottolineare che l’espressione $[A]^T \{\xi\}$ contenuta nella (8) rappresenta la coppia $\{\tau_a\}$ fornita dagli attuatori. Per due corpi i e j la generica matrice di trasformazione secondo Denavit-Hartenberg con riferimento alla Figura 2 sarà data da

$$[T]_i^j = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i)\cos(\alpha_i) & \sin(\theta_i)\cos(\alpha_i) & a_i \cos(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & -\cos(\theta_i)\cos(\alpha_i) & -\cos(\theta_i)\sin(\alpha_i) & a_i \sin(\theta_i) \\ 0 & \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & s_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

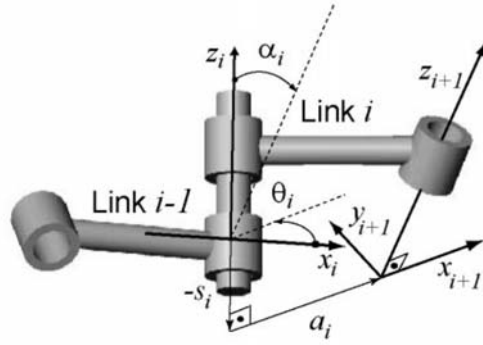


Figura 2: nomenclatura per la matrice di Denavit Hartenberg

Per un manipolatore ad n membri la matrice di trasformazione dall'end – effector al telaio si ottiene mediante il seguente prodotto

$$[T_0^i] = [T_0^1][T_1^2] \dots [T_{i-1}^i] \quad (12)$$

Ogni singola matrice della relazione (12) consente di trasformare le coordinate di un punto da un sistema di riferimento ad un altro utilizzando la seguente relazione:

$$\{r_p\}^j = [T]_i^j \{r_p\}^i \quad (13)$$

Per poter calcolare rapidamente la derivata della matrice $[T_j^0]$ si procede come di seguito descritto.
Essendo

$$\frac{\partial [T_j^0]}{\partial \theta_i} = [T_{i-1}^0] \frac{\partial [T_i^{i-1}]}{\partial \theta_i} [T_j^i] \quad (14)$$

e valendo la relazione

$$[T_j^i] = [T_i^0]^{-1} [T_j^0] \quad (15)$$

si ha in definitiva

$$\frac{\partial [T_j^0]}{\partial \theta_i} = [T_{i-1}^0] \frac{\partial [T_i^{i-1}]}{\partial \theta_i} [T_i^0]^{-1} [T_j^0] \quad (16)$$

Assumendo allora la presenza di sole coppie cilindriche, la derivata parziale nella formula (16) ha la seguente forma:

$$\frac{\partial [T_i^{i-1}]}{\partial \theta_i} = [T_i^{i-1}] \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

3. CALCOLO DELLE TENSIONI ALLE CINGHIE: λ - CORRECTOR

Per calcolare la tensione alle cinghie, si ricorre alla relazione $\{\tau_a\}=[A]^T\{\xi\}$ in cui $\{\tau_a\}$ è la coppia fornita dagli attuatori e $[A]^T$ è la trasposta della matrice struttura. Poiché lo spazio delle tensioni ha dimensione maggiore rispetto a quello delle coppie $\{\tau\}$, la soluzione del problema delle tensioni non è unica. Si possono esprimere le tensioni nella forma:

$$\{\xi\}=[A]^{+T}\{\tau\}+[H]\{\lambda\} \quad (18)$$

nel caso di meccanismi in cui $m=2n$, mentre

$$\{\xi\}=[A]^{+T}\{\tau\}+\{h\}\lambda \quad (19)$$

per meccanismi con $m=n+1$ cinghie, dove in entrambe le equazioni $[A]^{+T}$ è la pseudo inversa della matrice $[A]^T$. Le colonne della matrice $[H]$ sono il kernel della matrice $[A]^T$, ed in ragione del fatto che, esistendo per i meccanismi del primo tipo un numero n di coppie di cinghie contrapposte, possiamo ottenere i termini del vettore $\{\lambda\}$ valutando, per ogni coppia, il valore ottenuto nella soluzione particolare della tensione. A questo punto il valore minimo λ_i tale da garantire che entrambe le tensioni della coppia i -esima siano non negative è dato da:

$$\lambda_i = \left| \left([A]_{2i}^{+T} \right) \{\tau\} \right| \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (20)$$

in cui il termine $\left([A]_{2i}^{+T} \right)$ rappresenta la riga $2i$ della matrice $[A]^{+T}$. Il vettore $\{\lambda\}$ quindi ha dimensione $m-n$ ed è costituito dai termini λ_i espressi mediante la (20) tali da garantire solo valori positivi di tensione alle cinghie. Nel caso della seconda tipologia di meccanismi i termini del vettore $\{h\}$ sono sempre tutti dello stesso segno e diversi da zero. Lo scalare λ può quindi essere scelto in modo da annullare il valore negativo maggiore in modulo tra le tensioni ottenute dalla soluzione particolare:

$$\lambda = \min \left(\frac{\left([A]^{+T} \right)_i \{\tau\}}{h_i} \right) \quad i = 1, 2, \dots, n+1 \quad (21)$$

I due algoritmi proposti permettono di correggere in maniera efficace i valori delle tensioni in modo da renderle positive per una qualsiasi condizione di carico sull'end – effector e per qualsiasi configurazione del manipolatore. Esiste la possibilità, come peraltro mostrato da diversi autori [5,11], di calcolare le tensioni incognite attraverso il metodo del *torque rectifier*, in base a tale procedimento le tensioni delle cinghie possono essere ricavate in forma chiusa applicando delle semplici osservazioni di carattere cinematico relative alla struttura cinematica del meccanismo a puleggia. L'unico inconveniente legato a questo modo di procedere è dovuto all'assenza di generalità che si determina qualora si studino differenti

configurazioni nella disposizione delle linee di trasmissione. In altri termini la semplice analisi del grafo e della matrice struttura è di per sè insufficiente a determinare in maniera automatica le equazioni delle tensioni. La ricorsività delle equazioni è infatti tale da rendere, specialmente nei meccanismi ad elevati gradi di libertà, estremamente complessa la ricerca delle soluzioni in forma chiusa. In Figura 3 vengono confrontati i valori delle tensioni alle cinghie ottenuti mediante la strategia del λ - corrector e del torque rectifier method.

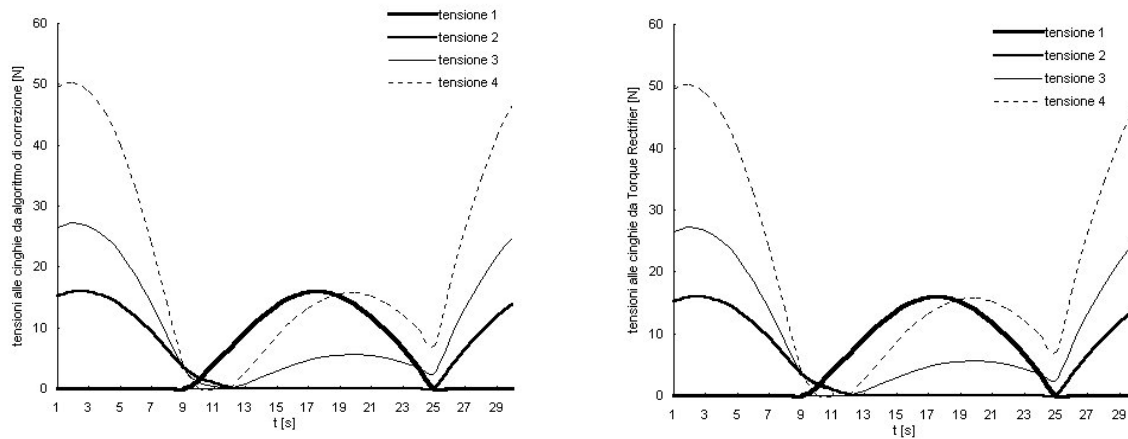


Figura 3: andamento delle tensioni alle cinghie mediante λ - corrector (sinistra) e torque rectifier method (destra)

4. SISTEMA DI CONTROLLO

Il controllo del meccanismo si realizza mediante la risoluzione di un problema di dinamica inversa, in altri termini si calcolano le coppie che devono esercitare i motori al fine di ottenere la desiderata traiettoria per l'end – effector. Nei sistemi robotici il problema del controllo viene spesso risolto attraverso sistemi di retroazione, ovvero attraverso l'impiego di sensori che misurando l'uscita di una certa grandezza, agiscono sul sistema di controllo permettendo di modificare l'ingresso fino a che non si raggiungano le condizioni desiderate. L'algoritmo di controllo proposto dagli autori invece permette di valutare in maniera sequenziale e senza adottare sistemi di retroazione, i valori delle coppie motrici in ingresso. Con riferimento al diagramma a blocchi di Figura 4 si procede nella seguente maniera:

1. Dalla traiettoria desiderata per l'end – effector, attraverso la cinematica inversa, si determinano i valori di $\{\theta(t)\}$, $\{\dot{\theta}(t)\}$ e $\{\ddot{\theta}(t)\}$;
2. Dai valori ottenuti al punto 1. si calcolano i termini $\{s(t)\}$, $\{\dot{s}(t)\}$ e $\{\ddot{s}(t)\}$ utilizzando le (1), ed il valore della coppia fornita dagli attuatori $\{\tau_a\}$ mediante la (8);
3. Attraverso il metodo del λ - corrector si utilizza la coppia fornita dagli attuatori calcolata al punto 2. nella (18) o (19) (a seconda della tipologia del sistema in esame) per definire le tensioni alle cinghie $\{\xi\}$;
4. I valori degli spostamenti, velocità ed accelerazioni delle cinghie ottenuti al punto 2. consentono di definire le quantità $\{\theta_m(t)\}$, $\{\dot{\theta}_m(t)\}$ e $\{\ddot{\theta}_m(t)\}$ relative ai rotori;
5. Infine utilizzando i risultati ottenuti ai punti 3. e 4. nella (6) si ricavano i valori delle coppie motrici $\{\tau_m\}$ erogate dai motori.

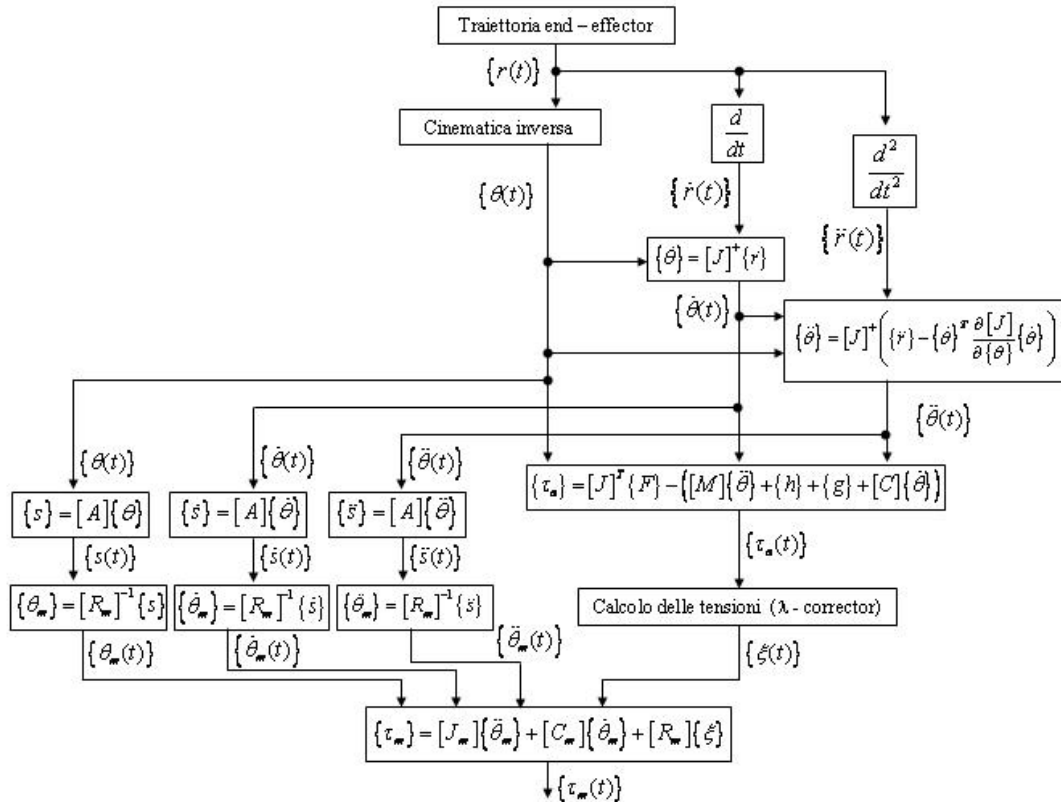


Figura 4: diagramma a blocchi del sistema di controllo

Appare quindi evidente come ad ogni passaggio, all'interno di ciascun blocco, si operi unicamente per sostituzione di variabili, senza che si abbia mai la necessità di integrazioni numeriche che sono spesso estremamente onerose dal punto di vista computazionale. Sotto questo punto di vista il vantaggio principale di una tale scelta consiste nella possibilità di ottenere in tempo reale la soluzione cercata, a tutto vantaggio di un'economia del tempo di calcolo. Il sistema di controllo è stato sviluppato in linguaggio MAPLE V e testato su diversi esempi numerici che ne dimostrano l'efficacia per differenti manipolatori a puleggia.

4.1. Esempio numerico: Stanford / J.P.L. finger

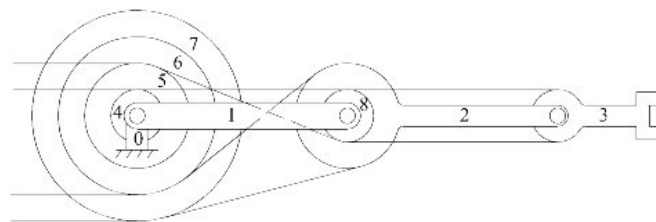


Figura 5: schema del meccanismo Stanford / J.P.L. finger

Come esempio di validazione del sistema di controllo si fa riferimento ad un meccanismo con un numero di cinghie $m = n + 1$ a 3 gradi di libertà rappresentato in Figura 5. Le caratteristiche del manipolatore e del sistema di attuatori sono riportate nelle Tabelle 1 e 2.

	Membro 1	Membro 2	Membro 3
Lunghezza	0.8	0.8	0.4
Massa	0.1	0.1	0.1
I_z	0.1	0.1	0.1
	Joint 1	Joint 2	Joint 3
C_i	0.01	0.01	0.01

Tabella 1: dati del manipolatore

	Attuatore 1	Attuatore 2	Attuatore 3	Attuatore 4
J_{mi}	0.08	0.08	0.08	0.08
C_{mi}	0.1	0.1	0.1	0.1
R_{mi}	0.1	0.1	0.1	0.1

Tabella 2: dati degli attuatori

La forza applicata all'end – effector è pari a $\{F\} = \{-10 \ 10 \ 0\}^T$. Per ciò che concerne l'inversione cinematica, i tre gradi di libertà sono da considerarsi ridondanti rispetto alle condizioni imposte dalla traiettoria dell'end – effector. Per ovviare a tale inconveniente si è imposta la condizione di perpendicolarità del membro 3 rispetto alla traiettoria, in modo da determinare il grado di libertà ridondante. La legge oraria imposta all'end – effector è di tipo armonica (Tabella 3) e si sono ricavati, al variare del tempo, i valori delle coppie erogate dai quattro motori mediante l'algoritmo di controllo proposto. Andando a derivare rispetto al tempo le relazioni della legge oraria si determinano la velocità e l'accelerazione dell'end – effector.

Traiettoria	$\{r(t)\}$
$y = 0.1 \cdot \sin(10 \cdot x)$	$x(t) = 0.5 + 0.1t$ $y(t) = \sin(5 + t)$ $\phi(t) = \tan^{-1}(\cos(5 + t)) + \frac{3}{2}\pi$

Tabella 3: legge oraria dell'end – effector

Procedendo con le sostituzioni numeriche espote nel diagramma del sistema di controllo, si ottengono tutte le grandezze di analisi necessarie sino a pervenire al valore delle coppie erogate dai motori in grado di produrre la traiettoria desiderata. Le coppie così ottenute e le tensioni alle cinghie sono riportate nei grafici di Figura 6.

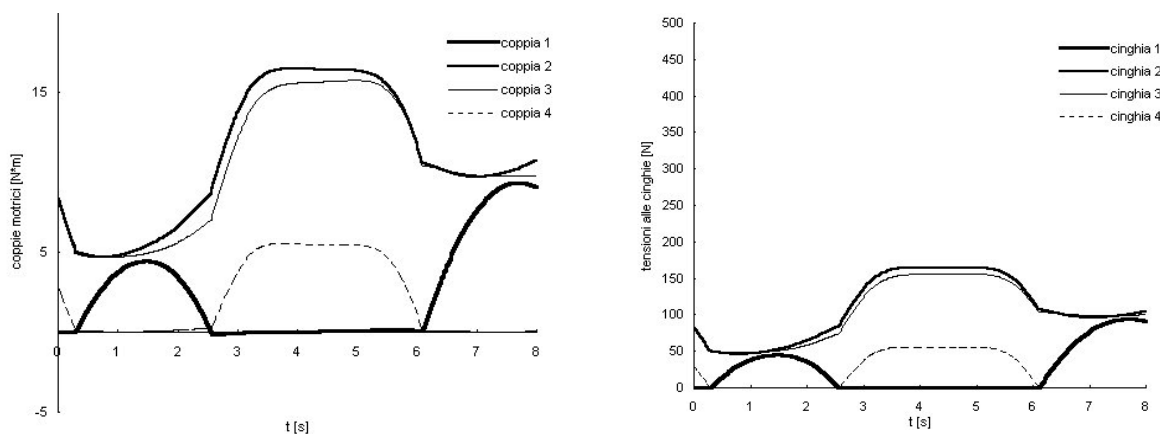


Figura 6: andamento delle coppie motrice (sinistra) e delle tensioni alle cinghie (destra)

5. CONCLUSIONI

Gli autori hanno proposto nel presente articolo una nuova strategia di controllo dei meccanismi a puleggia con particolare riguardo al calcolo delle tensioni nelle cinghie. La strategia sviluppata ben si adatta al controllo di qualsiasi tipo di manipolatore e garantisce l'ottimizzazione della traiettoria dell'end – effector in funzione delle tensioni che si instaurano nelle linee di trasmissione. Ciò permette di calcolare le coppie motrici necessarie a movimentare un manipolatore a puleggia che, sotto una qualsiasi condizione di carico, debba seguire una traiettoria particolare.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [1] Lee, J.J., *Tendon-Driven Manipulators, Analysis, Synthesis and Control*, doctoral dissertation, University of Maryland, College Park, MD, 1991
- [2] Tsai, L.W., *Kinematics Analysis of Tendon Driven Mechanism Using Graph Theory*, ASME Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design, vol.111, 1989, pp.59-65.
- [3] Lee, J.J., Tsai, L.W., *Torque Revolver Design for Tendon Driven Manipulators*, ASME Journal of Mechanical Design, vol.115, 1993, pp. 877-883.
- [4] Lee, J.J., Tsai, L.W., *On Structural Synthesis of Tendon-Driven Manipulators Having a Pseudo-Triangular Matrix*, International Journal of Robotics Research, vol.10, n.3, 1991, pp. 225-262.
- [5] Iversen E.K., Jacobsen S.C., Ko H. and Davis C.C., *Antagonistic control of a tendon driven manipulator*. Technical report, Proc. IEEE International Conference on Robotics and Automation pag. 1334-1339, 1989.
- [6] Pennestrì E., *Dinamica Tecnica e Computazionale*, vol.2, Casa Editrice Ambrosiana, 2002 (in italiano)
- [7] Tsai L. W., *Design of tendon – driven manipulators*, Technical report, Mechanical Engineering Department and Institute of System Research, University of Maryland, 1994.
- [8] Denavit, J., Hartenberg, R.S., *A Kinematic Notation for Lower Pair Mechanism Based on Matrices*, ASME Journal of Applied Mechanics, vol.77, 1995, pp. 215-221.
- [9] Denavit, J., Hartenberg, R.S., *Kinematic Synthesis of Linkages*, McGraw-Hill Book Co., New York, 1964.
- [10] Londi, F. *Cinematica e Dinamica dei Meccanismi a Puleggia*, degree thesis in Mechanical Engineering, University of Rome Tor Vergata, a. year 2001/2002 (in italiano)
- [11] Knutti D.F, Jacobsen S.C., Wood J.E. and Biggers K.B., *The Utah-Mit Dexterous Hand: Work in progress*, Technical report, International Journal of Robotics Research 3(4), Winter 1984.
- [16] Tsai, L.W., *Robot Analysis – The mechanics of Serial and Parallel Manipulators*, John Wiley & Sons, 1999.
- [13] Salisbury, J.K., Craig, J.J., *Articulated Hands: Force Control and Kinematic Issues*, The International Journal of Robotics Research, vol.1, n.1, 1982, pp.4-17.
- [14] Salisbury, J.K., Roth B., *Kinematic and Force Analysis of Articulated Mechanical Hands*, ASME Journal of Mechanism, Transmission and Automation in Design, vol.105,n.1,1983, pp.35-41.