

## ANALISI DEL RENDIMENTO MECCANICO DI UN GIUNTO CARDANICO

M. CAVACECE<sup>1</sup>, E. PENNESTRI<sup>2</sup>, P.P. VALENTINI<sup>2</sup>, L. VITA<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Dipartimento di Meccanica Strutture Ambiente e Territorio, Università degli Studi di Cassino, Cassino*

<sup>2</sup>*Dipartimento di Ingegneria Meccanica, Università degli Studi di Roma "Tor Vergata, Roma*

### SOMMARIO

L'indagine, i cui risultati vengono qui preliminarmente riassunti, riguarda un'analisi teorica dell'influenza del regime di rotazione e degli errori di costruzione sul rendimento meccanico di un giunto cardanico. Il giunto è stato modellato come un meccanismo RCCC e l'analisi dinamica completa è stata eseguita utilizzando l'algebra dei vettori duali.

### ABSTRACT

This investigation concerns with the influence of rotation speed on the mechanical efficiency of Cardan joints. The model includes also the effects due to manufacturing and mounting errors on the efficiency. The joint has been modelled as an RCCC spatial linkage and the full dynamic analysis performed by means of dual vectors algebra.

### 1. INTRODUZIONE

Il giunto cardanico costituisce uno dei giunti più frequentemente impiegati in applicazioni industriali. Un primo modello di analisi del rendimento meccanico di tale giunto fu impostato da A. Morecki [1]. In particolare, il modello

- considerava solo le perdite nelle coppie della crociera;
- trascurava le azioni di inerzia;
- non comprendeva la presenza di errori di costruzione e montaggio.

Allo scopo di affinare l'analisi di Morecki, alcuni autori del presente lavoro (E.P. e P.P.V.) [2]

- pervenivano per altra via agli stessi risultati di A. Morecki;
- includevano anche le perdite nelle coppie che collegano i membri mobili con il telaio;
- estendevano i risultati al doppio giunto cardanico omocinetico.

Per semplicità di impiego i risultati venivano presentati in forma di *design charts*. In un lavoro successivo [3], il modello di stima del rendimento ha incluso anche gli effetti che, sul rendimento meccanico, avevano gli errori di costruzione e montaggio.

Pur essendo disponibili modelli di analisi dinamica in presenza di errori di costruzione e montaggio in un giunto cardanico ([4, 5, 6, 7]), da una disamina della letteratura scientifica sembrerebbe esserci carenza di modelli di calcolo che mettano in relazione il rendimento meccanico di un giunto cardanico con il regime di rotazione. Scopo principale della presente memoria è dunque quello di colmare tale lacuna.

Nella presente analisi, la modellazione degli errori di costruzione e montaggio sulla cinematica del meccanismo è avvenuta considerando un meccanismo RCCC. Inoltre, vengono ammesse le seguenti ipotesi

- attrito Coulombiano;
- assenza di stiction;
- assenza di giochi o backlash nelle coppie cinematiche;
- corpi rigidi.

Il lavoro, in particolare, è articolato come segue:

- cenni sull'analisi dinamica dei meccanismi mediante l'algebra dei numeri duali;
- analisi dinamica completa di un meccanismo RCCC cinematicamente equivalente al giunto cardanico con errori dimensionali;
- modello per il calcolo delle forze introdotte dall'attrito nelle coppie cinematiche;
- presentazione dei risultati numerici.

## 2. NOMENCLATURA

- $[\widehat{A}]_i^{i+1}$ : Matrice duale per la trasformazione di vettori duali dal riferimento cartesiano associato alla coppia  $i^{\text{ma}}$  a quello associato alla coppia  $(i+1)^{\text{ma}}$ ;
- $C_i$ : origine del sistema di coordinate della coppia  $i^{\text{ma}}$ ;
- $\widehat{F}_{C(i)}^{(i_k)}$  è il vettore duale delle azioni dinamiche esterne (forze e coppie) agenti sul corpo  $i$ , ridotto in  $C$  e con le componenti espresse nel riferimento  $i_k$ ;
- $G_i$ : baricentro del membro  $i^{\text{mo}}$ ;
- $[J_{C(i)}^{(i_k)}]$ , matrice d'inerzia del corpo  $i$  calcolata rispetto al riferimento  $C - x_{i_k}y_{i_k}z_{i_k}$ ;
- $\{\widehat{H}_{C_j(j-1)}^{(j)}\}$ : Quantità di moto duale del corpo  $(j-1)^{\text{mo}}$ , calcolata nel punto  $C_j$  ed espressa nel riferimento della coppia  $j^{\text{ma}}$ ;
- $m_i$ : massa del membro  $i^{\text{mo}}$ ;
- $\{\widehat{R}_{C_j(j)}^{(j)}\}$ : Vettore delle forze duali agenti sul membro  $j^{\text{mo}}$ , calcolate in  $C_j$ , ed espressa nel riferimento della coppia  $j^{\text{ma}}$ ;
- $\vec{R}^{(i_k)} = \vec{CG}_i$ , vettore espresso in  $C - x_{i_k}y_{i_k}z_{i_k}$ ;
- $s_i$ : spostamento relativo nella  $i^{\text{ma}}$  coppia cilindrica (v. Figura 1);
- $\widehat{v}_{C(i,j)}^{(i_k)} = \vec{\omega}_i^{(i_k)} + \varepsilon \vec{v}_{C(i,j)}^{(i_k)}$ : velocità duale del corpo  $i$ , rispetto al corpo  $j$ , calcolata in  $C$  e misurata nel riferimento  $i_k$ . Quando  $j$  si riferisce al membro telaio, il pedice può essere omesso.
- $\alpha_i$  angolo tra gli assi  $z_i$  e  $z_{i+1}$ ;
- $\varepsilon$ : unità duale ( $\varepsilon^2 = 0$ );
- $\eta_i$  rendimento meccanico del giunto cardanico;
- $\omega_i$ : Velocità angolare relativa tra i membri che convergono nella coppia  $i^{\text{ma}}$ ;
- $\cdot$ : indica l'operazione di derivata temporale;
- $\sim$ : indica la matrice antisimmetrica associata ad un vettore;

### 3. EQUAZIONI DI NEWTON-EULER IN FORMA DUALE

Il momento della quantità di moto duale del corpo rigido  $i^{\text{mo}}$ , valutato in  $C$ , ed espresso nel riferimento  $i_k$ , vale

$$\begin{aligned} \left\{ \widehat{H}_{C(i)} \right\}^{(i_k)} &= m_i \left\{ v_{C(i)} \right\}^{(i_k)} - m_i \left[ \widetilde{R}^{(i_k)} \right] \left\{ \omega_i \right\}^{(i_k)} \\ &+ \varepsilon \left( m_i \left[ \widetilde{R}^{(i_k)} \right] \left\{ v_{C(i)} \right\}^{(i_k)} + \left[ J_{C(i)}^{(i_k)} \right] \left\{ \omega_i \right\}^{(i_k)} \right) . \end{aligned} \quad (1)$$

Com'è noto, la derivata del momento della quantità di moto di un corpo, rispetto ad un punto  $C$  è pari alla somma dei momenti delle forze agenti sul corpo medesimo, tutti calcolati rispetto a  $C$ .

Tale principio può essere dunque espresso in forma duale, attraverso l'espressione

$$\frac{d}{dt} \left\{ \widehat{H}_{C(i)} \right\}^{(i_k)} = \left\{ \widehat{F}_{C(i)} \right\}^{(i_k)} . \quad (2)$$

Tenuto conto che  $i_k$  non è un riferimento inerziale, ma si muove con un atto di moto definito dalla velocità duale  $\left\{ v_{C(i)} \right\}^{(i_k)}$ , la (2) si trasforma nella seguente

$$\left\{ \widehat{H}_{C(i)} \right\}^{(i_k)} + \left[ \widetilde{v}_{C(i)}^{(i_k)} \right] \left\{ \widehat{H}_{C(i)} \right\}^{(i_k)} = \left\{ \widehat{F}_{C(i)} \right\}^{(i_k)} . \quad (3)$$

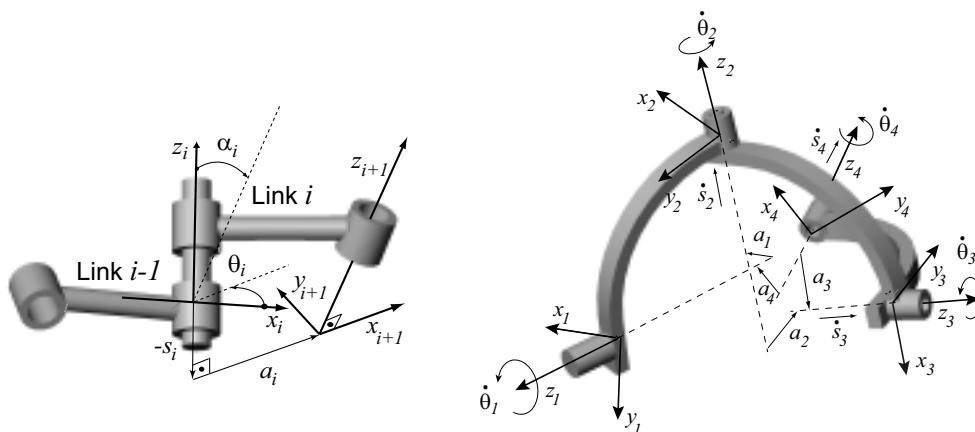


Figura 1: Denavit-Hartenberg parameters

### 4. DINAMICA DI UN QUADRILATERO RCCC

Possono innanzitutto scriversi, per i tre corpi mobili, le equazioni duali di equilibrio:

$$\left[ \widehat{A} \right]_1^2 \left\{ \widehat{R}_{C_1(1)} \right\}^{(1)} - \left\{ \widehat{R}_{C_2(2)} \right\}^{(2)} = \left\{ \widehat{F}_{C_2(1)} \right\}^{(2)} , \quad (4a)$$

$$\left[ \widehat{A} \right]_2^3 \left\{ \widehat{R}_{C_2(2)} \right\}^{(2)} - \left\{ \widehat{R}_{C_3(3)} \right\}^{(3)} = \left\{ \widehat{F}_{C_3(2)} \right\}^{(3)} , \quad (4b)$$

$$\left[ \widehat{A} \right]_3^4 \left\{ \widehat{R}_{C_3(3)} \right\}^{(3)} - \left\{ \widehat{R}_{C_4(4)} \right\}^{(4)} = \left\{ \widehat{F}_{C_4(3)} \right\}^{(4)} . \quad (4c)$$

Queste ultime, tenuta presente la (3), forniscono, per  $j = 2, 3, 4$ ,

$$\left\{ \widehat{H}_{C_j(j-1)} \right\}^{(j)} + \left[ \widehat{v}_{C_j(j-1)} \right]^{(j)} \left\{ \widehat{H}_{C_j(j-1)} \right\}^{(j)} = \left[ \widehat{A} \right]_{j-1}^j \left\{ \widehat{R}_{C_{j-1}(j-1)} \right\}^{(j-1)} - \left\{ \widehat{R}_{C_j(j)} \right\}^{(j)}, \quad (5)$$

ovvero il sistema di equazioni lineari da risolvere rispetto alle componenti dei vettori duali delle forze vincolari ai giunti

Il primo passo consiste dunque nel valutare le quantità di moto duali dei corpi mobili. Nel caso del meccanismo RCCC, particolarizzando la (1) e posto

$$m_i \{C_{i+1}G_i\}^{(i+1)} = \{S_i\}^{(i+1)}, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (6)$$

le quantità di moto duali per i membri mobili del meccanismo valgono:

**Membro 1:**

$$\begin{aligned} \left\{ \widehat{H}_{C_2(1)} \right\}^{(2)} &= m_1 \{v_{C_2(1)}\}^{(2)} - \left[ \widetilde{S}_1^{(2)} \right]^{(2)} \{\omega_1\}^{(2)} \\ &+ \varepsilon \left( \left[ \widetilde{S}_1^{(2)} \right]^{(2)} \{v_{C_2(1)}\}^{(2)} + \left[ J_{C_2(1)}^{(2)} \right] \{\omega_1\}^{(2)} \right), \end{aligned} \quad (7)$$

**Membro 2:**

$$\begin{aligned} \left\{ \widehat{H}_{C_3(2)} \right\}^{(3)} &= m_2 \{v_{C_3(2)}\}^{(3)} - \left[ \widetilde{S}_2^{(3)} \right]^{(3)} \{\omega_2\}^{(3)} \\ &+ \varepsilon \left( \left[ \widetilde{S}_2^{(3)} \right]^{(3)} \{v_{C_3(2)}\}^{(3)} + \left[ J_{C_3(2)}^{(3)} \right] \{\omega_2\}^{(3)} \right), \end{aligned} \quad (8)$$

**Membro 3:**

$$\begin{aligned} \left\{ \widehat{H}_{C_4(3)} \right\}^{(4)} &= m_3 \{v_{C_4(3)}\}^{(4)} - \left[ \widetilde{S}_3^{(4)} \right]^{(4)} \{\omega_3\}^{(4)} \\ &+ \varepsilon \left( \left[ \widetilde{S}_3^{(4)} \right]^{(4)} \{v_{C_4(3)}\}^{(4)} + \left[ J_{C_4(3)}^{(4)} \right] \{\omega_3\}^{(4)} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

D'altro canto, per definire i vettori velocità presenti in quest'ultime, è necessario prendere in considerazione anche le seguenti uguaglianze che derivano dall'analisi cinematica:

$$\begin{aligned} \left\{ \widehat{v}_{C_2(1,4)} \right\}^{(2)} &= \{\omega_1\}^{(2)} + \varepsilon \{v_{C_2(1,4)}\}^{(2)} \\ &= \left[ \widehat{A} \right]_1^2 \left\{ \widehat{v}_{C_1(1,4)} \right\}^{(1)}, \end{aligned} \quad (10)$$

ove

$$\left\{ \widehat{v}_{C_1(1,4)} \right\}^{(1)} = \{ 0 \quad 0 \quad \dot{\theta}_1 \}^T, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \left\{ \widehat{v}_{C_3(2,4)} \right\}^{(3)} &= \{\omega_2\}^{(3)} + \varepsilon \{v_{C_3(2)}\}^{(3)} \\ &= \left[ \widehat{A} \right]_4^3 \left\{ \widehat{v}_{C_4(3,4)} \right\}^{(4)} - \left\{ \widehat{v}_{C_3(3,2)} \right\}^{(3)}, \end{aligned} \quad (12)$$

ove

$$\left\{ \widehat{v}_{C_4(3,4)} \right\}^{(4)} = \{ 0 \quad 0 \quad -(\dot{\theta}_4 + \varepsilon \dot{s}_4) \}^T, \quad (13)$$

e

$$\left\{ \widehat{v}_{C_3(3,2)} \right\}^{(3)} = \{ 0 \quad 0 \quad (\dot{\theta}_3 + \varepsilon \dot{s}_3) \}^T, \quad (14)$$

$$\left\{ \widehat{v}_{C_4(3,4)} \right\}^{(4)} = \{\omega_3\}^{(4)} + \varepsilon \{v_{C_4(3)}\}^{(4)}. \quad (15)$$

Allorché si particularizzi la (3) per i membri del quadrilatero RCCC, avremo le azioni d'inerzia espresse in notazione duale:

$$\begin{aligned}
 \left\{ \widehat{F}_{C_2(1)} \right\}^{(2)} &= \left\{ \begin{array}{l} -(-m_1 a_1 + S_{1x}) \dot{\theta}_1^2 + (S_{1z} s \alpha_1 - S_{1y} c \alpha_1) \ddot{\theta}_1 \\ (S_{1z} s \alpha_1 - S_{1y} c \alpha_1) c \alpha_1 \dot{\theta}_1^2 + (m_1 a_1 c \alpha_1 + S_{1x} c \alpha_1) \ddot{\theta}_1 \\ -(S_{1z} s \alpha_1 - S_{1y} c \alpha_1) s \alpha_1 \dot{\theta}_1^2 - (m_1 a_1 + S_{1x}) s \alpha_1 \ddot{\theta}_1 \end{array} \right\} \\
 + \varepsilon &\left\{ \begin{array}{l} -J_{1yz} c 2 \alpha_1 \dot{\theta}_1^2 + (J_{1zz} - J_{1yy}) s \alpha_1 c \alpha_1 \dot{\theta}_1^2 \\ -(S_{1z} a_1 c \alpha_1 + S_{1y} a_1 s \alpha_1 - J_{1xz} c \alpha_1 - J_{1xy} s \alpha_1) \ddot{\theta}_1 \\ \hline (J_{1xy} s \alpha_1 c \alpha_1 + J_{1xz} c^2 \alpha_1 - a_1 S_{1z}) \dot{\theta}_1^2 \\ + (S_{1x} a_1 s \alpha_1 + J_{1yy} s \alpha_1 + J_{1yz} c \alpha_1) \ddot{\theta}_1 \\ \hline (a_1 S_{1y} - J_{1xy} s^2 \alpha_1 - J_{1xz} s \alpha_1 c \alpha_1) \dot{\theta}_1^2 \\ + (a_1 S_{1x} c \alpha_1 + J_{1yz} s \alpha_1 + J_{1z} c \alpha_1) \ddot{\theta}_1 \end{array} \right\} \quad (16) \\
 \left\{ \widehat{F}_{C_3(2)} \right\}^{(3)} &= \left\{ \begin{array}{l} -2m_2 s \alpha_3 c \theta_3 s_3 \dot{\theta}_4 - S_{2x} \dot{\theta}_3^2 - 2S_{2x} c \alpha_3 \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4 \\ + (-S_{2x} c^2 \theta_3 + S_{2z} s \alpha_3 c \alpha_3 s \theta_3 - S_{2x} s^2 \theta_3 c^2 \alpha_3 \\ - m_2 s_3 c \alpha_3 s \alpha_3 s \theta_3 - S_{2y} s \theta_3 c \theta_3 s^2 \alpha_3 + m_2 a_3 c \theta_3) \dot{\theta}_4^2 \\ - (m_2 s \alpha_3 c \theta_3 s_3 - S_{2y} c \alpha_3 + m_2 a_3 c \alpha_3 s \theta_3 - S_{2z} s \alpha_3 c \theta_3) \ddot{\theta}_4 \\ \hline -m_2 s \alpha_3 s \theta_3 \ddot{s}_4 + S_{2y} \ddot{\theta}_3 \\ \hline -2m_2 s \alpha_3 s \theta_3 \dot{\theta}_4 \dot{s}_3 - S_{2y} \dot{\theta}_3^2 - 2S_{2y} c \alpha_3 \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4 \\ (m_2 c \alpha_3 s \alpha_3 c \theta_3 s_3 - S_{2z} c \alpha_3 s \alpha_3 c \theta_3 + m_2 a_3 s \theta_3 \\ - S_{2x} s \theta_3 c \theta_3 s^2 \alpha_3 - S_{2y} c^2 \theta_3 - S_{2y} c^2 \alpha_3 c^2 \theta_3) \dot{\theta}_4^2 \\ + (m_2 a_3 c \alpha_3 c \theta_3 - S_{2x} c \alpha_3 - m_2 s_3 s \alpha_3 s \theta_3 + S_{2z} s \alpha_3 s \theta_3) \ddot{\theta}_4 \\ \hline -S_{2x} \ddot{\theta}_3 + m_2 s \alpha_3 c \theta_3 \ddot{s}_4 \\ \hline (2S_{2x} s \alpha_3 s \theta_3 - 2S_{2y} s \alpha_3 c \theta_3) \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4 \\ + (m_2 s_3 - S_{2z} + S_{2x} s \alpha_3 s \theta_3 c \alpha_3 - m_2 s_3 c^2 \alpha_3 - S_{2z} c^2 \alpha_3 \\ - S_{2y} s \alpha_3 c \alpha_3 c \theta_3) \dot{\theta}_4^2 + m_2 \ddot{s}_3 - m_2 c \alpha_3 \ddot{s}_4 \\ + (m_2 a_3 s \alpha_3 - S_{2y} s \alpha_3 s \theta_3 - S_{2x} s \alpha_3 c \theta_3) \ddot{\theta}_4 \end{array} \right\}
 \end{aligned}$$

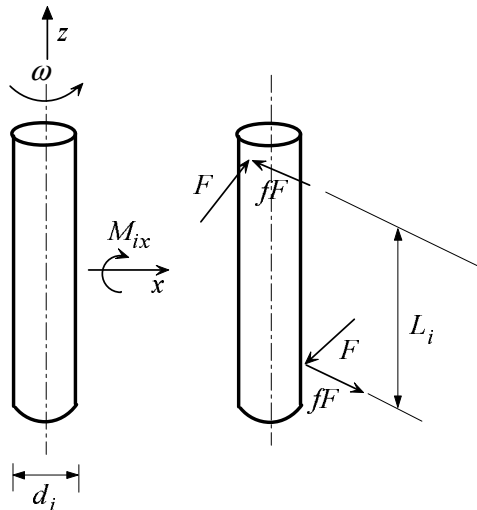


Figura 2: Azioni dinamiche dovute all'attrito nelle coppie

$$\left. \begin{aligned}
& 2S_{2z}s_3s\alpha_3s\theta_3\dot{\theta}_4 - J_{2yz}\dot{\theta}_3^2 - s\alpha_3c\theta_3 (J_{2xx} + J_{2zz} - J_{2yy} + 2J_{2xy})\dot{\theta}_3\dot{\theta}_4 \\
& - 2J_{2yz}c\alpha_3\dot{\theta}_3\dot{\theta}_4 + (-J_{2yz}c^2\alpha_3s^2\theta_3 - [S_{2z}s_3 + J_{2zz} - J_{2yy} + J_{2xy}]s\alpha_3c\alpha_3c\theta_3 \\
& + J_{2yz}c^2\theta_3 - S_{2z}a_3s\theta_3 - J_{2xz}s\theta_3c\theta_3s^2\alpha_3 - S_{2y}s_3s^2\alpha_3)\dot{\theta}_4^2 - J_{2xz}\ddot{\theta}_3 \\
& - S_{2y}\ddot{s}_3 + (S_{2y}a_3s\alpha_3 - J_{2xx}s\alpha_3s\theta_3 - J_{2xz}c\alpha_3 \\
& S_{2z}a_3c\alpha_3c\theta_3 + S_{2z}s_3s\alpha_3s\theta_3 + J_{2xy}s\alpha_3c\theta_3)\ddot{\theta}_4 \\
& - (S_{2y}c\alpha_3 + S_{2z}s\alpha_3c\theta_3)\ddot{s}_4 \\
\hline
& - 2S_{2z}s_3s\alpha_3c\theta_3\dot{\theta}_4 + J_{2xz}\dot{\theta}_3^2 + s\alpha_3s\theta_3 (J_{2xx} - J_{2yy} - J_{2zz})\dot{\theta}_3\dot{\theta}_4 \\
& - 2(J_{2xy}s\alpha_3c\theta_3 - J_{2xz}c\alpha_3)\dot{\theta}_3\dot{\theta}_4 + (-J_{2xz}s^2\theta_3 - J_{2xy}c\alpha_3s\alpha_3c\theta_3 - S_{2x}s_3 \\
& + J_{2yz}s\theta_3c\theta_3c^2\alpha_3 + c\alpha_3s\alpha_3s\theta_3 [J_{2xx} - s_3S_{2z} - J_{2zz}] \\
& a_3S_{2z}c\theta_3 - J_{2xz}c^2\alpha_3 [2 - c^2\theta_3] + J_{2yz}s\theta_3c\theta_3 + S_{2x}s_3c^2\alpha_3)\dot{\theta}_4^2 \\
& + (J_{2yy}s\alpha_3c\theta_3 - S_{2x}a_3s\alpha_3 - S_{2z}s_3s\alpha_3c\theta_3 - S_{2z}s_3s\alpha_3c\theta_3 - S_{2z}a_3c\alpha_3s\theta_3 \\
& - J_{2xy}s\alpha_3s\theta_3 - J_{2yz}c\alpha_3)\ddot{\theta}_4 + (S_{2x}c\alpha_3 - S_{2z}s\alpha_3s\theta_3)\ddot{s}_4 - S_{2x}\ddot{s}_3 \\
\hline
& 2(S_{2y}c\theta_3 - S_{2x}s\theta_3)s\alpha_3\dot{\theta}_4\ddot{s}_3 + (-J_{2xy}c^2\alpha_3 - S_{2y}a_3c\theta_3 - [J_{2yy} - J_{2xx}]s\theta_3c\theta_3 \\
& + [S_{2x}c\theta_3 + S_{2y}s\theta_3]s_3s\alpha_3c\alpha_3 + [J_{2yz}s\theta_3 + J_{2xz}c\theta_3]s\alpha_3c\alpha_3 \\
& + [J_{2xx} + J_{2yy}]s\theta_3c\theta_3c^2\alpha_3 + J_{2xy} \\
& S_{2x}a_3s\theta_3 - 2J_{2xy}c^2\theta_3s^2\alpha_3)\dot{\theta}_4^2 - J_{2z}\ddot{\theta}_3 \\
& + [S_{2y}c\theta_3 - S_{2x}s\theta_3]s_3s\alpha_3 + [J_{2yz}c\theta_3 - J_{2xz}s\theta_3]s\alpha_3 \\
& [S_{2x}c\theta_3 + S_{2y}s\theta_3]a_3c\alpha_3 - J_{2zz}c\alpha_3)\ddot{\theta}_4 \\
& (S_{2x}c\theta_3 + S_{2y}s\theta_3)s\alpha_3\ddot{s}_4
\end{aligned} \right\} + \varepsilon \quad (17)$$

$$\left\{ \widehat{F}_{C_4(3)} \right\}^{(4)} = \begin{Bmatrix} S_{3y}\ddot{\theta}_4 - S_{3x}\dot{\theta}_4^2 \\ -S_{3x}\ddot{\theta}_4 - S_{3y}\dot{\theta}_4^2 \\ -m_3\ddot{s}_4 \end{Bmatrix} + \varepsilon \begin{Bmatrix} -S_{3y}\ddot{s}_4 - J_{3xz}\ddot{\theta}_4 - J_{3yz}\dot{\theta}_4^2 \\ S_{3x}\ddot{s}_4 - J_{3yz}\ddot{\theta}_4 + J_{3xz}\dot{\theta}_4^2 \\ -J_{3z}\ddot{\theta}_4 \end{Bmatrix}$$

La soluzione del sistema di equazioni (4) fornirà le componenti incognite delle forze duali ai giunti.

## 5. AZIONI DINAMICHE IN PRESENZA D'ATTRITO

Nella  $i^{\text{ma}}$  coppia rotoidale, le forze di attrito sono dovute alla presenza delle:

- forze vincolari  $F_{xi}$ ,  $F_{yi}$  and  $F_{zi}$ ;
- $M_{xi}$  and  $M_{yi}$

L'azione resistente attorno all'asse  $z$  dovuta alle coppie di reazione  $M_{xi}$  and  $M_{yi}$  può essere modellata [8, 9, 2] secondo lo schema presentato in Figura 2. In particolare la coppia  $M_{xi}$  è sostituita da due forze  $F$  parallele ed opposte che agiscono normalmente all'asse della coppia rotoidale. A causa della presenza di attrito tali forze generano una coppia d'attrito:

$$\tau_f^{xi} = f \frac{d_i}{L_i} M_{xi} , \quad (18)$$

dove  $d_i$  è il diametro del perno,  $L_i$  la distanza tra i supporti <sup>1</sup> ed  $f$  il coefficiente d'attrito dinamico.

Analogamente, la coppia  $M_{yi}$  dà luogo alla coppia d'attrito

$$\tau_f^{yi} = f \frac{d_i}{L_i} M_{yi} . \quad (19)$$

<sup>1</sup>Per un cuscinetto con un singolo supporto  $L_i$  rappresenta la lunghezza assiale del cuscinetto.

In definitiva, la componente della coppia di attrito lungo l'asse  $z$  è calcolata ponendo

$$M_{zi} = -\text{sign}(\dot{\theta}_i) \left( \tau_f^{(i)} + \frac{f d_i}{2} \sqrt{F_{xi}^2 + F_{yi}^2} \right), \quad (20)$$

ove

$$\tau_f^{(i)} = f \frac{d_i}{L_i} \sqrt{M_{xi}^2 + M_{yi}^2}. \quad (21)$$

Appare evidente che la presenza dell'attrito altera l'equilibrio tra i membri. Tuttavia, considerati gli elevati valori del rendimento, questo effetto non viene incluso.

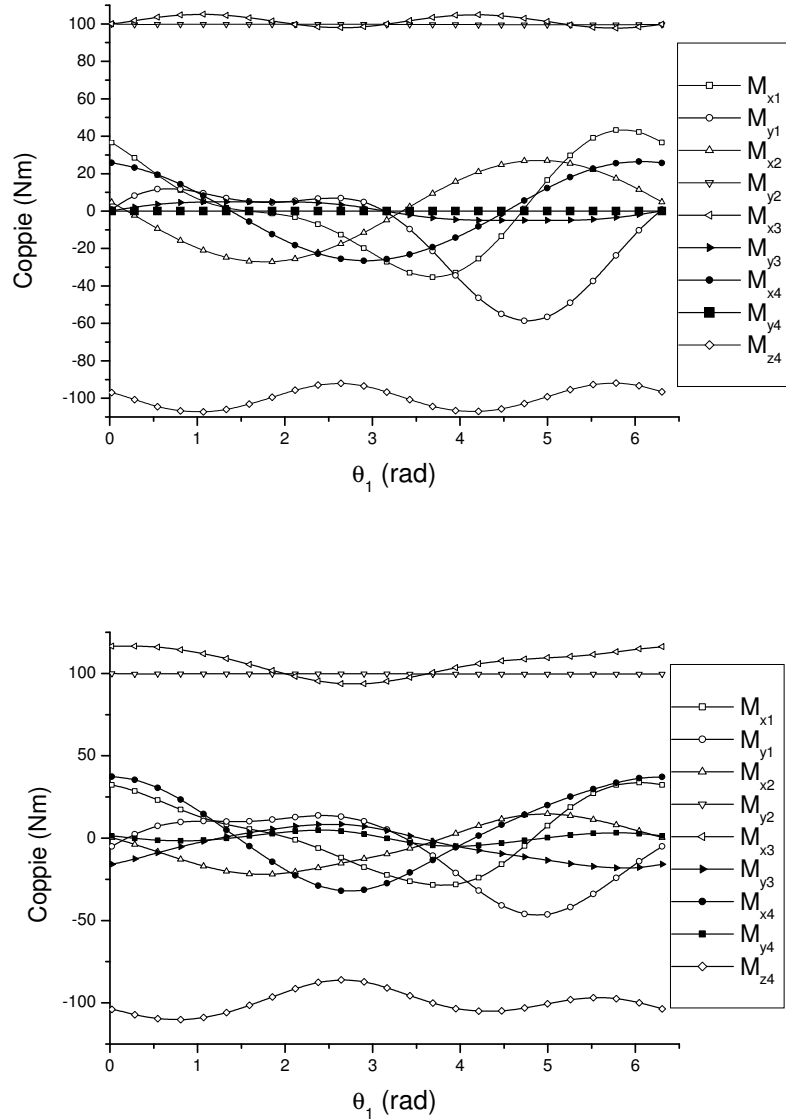


Figura 3: Confronto tra i momenti registrati nelle coppie cinematiche nel caso di giunto cardanico senza (grafico in alto) e con errori (grafico in basso). Le variazioni ipotizzate sui valori di  $a_i$  ed  $\alpha_i$  sono di 5 mm e  $10^{-4}$  rad, rispettivamente.

Per la coppia cilindrica,  $\dot{s}_i \neq 0$ ,  $M_{zi} = 0$  and  $F_{zi} = 0$  e la presenza dell'attrito genera la coppia  $M_{zi}$  e la forza  $F_{zi}$ . La coppia  $M_{zi}$  viene calcolata in maniera analoga a quanto già descritto per la coppia rotoidale.

Pertanto, le suddette azioni dinamiche verranno calcolate tramite le seguenti equazioni:

$$F_{zi} = -\text{sign}(\dot{s}_i) f \left( \sqrt{F_{xi}^2 + F_{yi}^2} + 2 \frac{\sqrt{M_{xi}^2 + M_{yi}^2}}{L_i} \right), \quad (22)$$

$$M_{zi} = -\text{sign}(\dot{\theta}_i) \left( \tau_f^{(i)} + \frac{f d_i}{2} \sqrt{F_{xi}^2 + F_{yi}^2} \right). \quad (23)$$

## 6. ESEMPIO NUMERICO

Il modello esposto consente innanzitutto di valutare, in condizioni dinamiche, gli effetti degli errori.

Negli esempi presentati si è adottato un coefficiente di attrito dinamico  $f=0.005$ , mentre, per tutte le coppie cinematiche, si è assunto  $L_i=5\text{cm}$  e  $d_i=4\text{ cm}$ . Le masse dei membri risultano essere  $m_1=1.890\text{ Kg}$ ,  $m_2=1.57\text{ Kg}$ ,  $m_3=3.130\text{ Kg}$ , e le rimanenti caratteristiche inerziali dei membri sono state riassunte nella Tabella 1. La coppia motrice è pari a  $100\text{ Nm}$ .

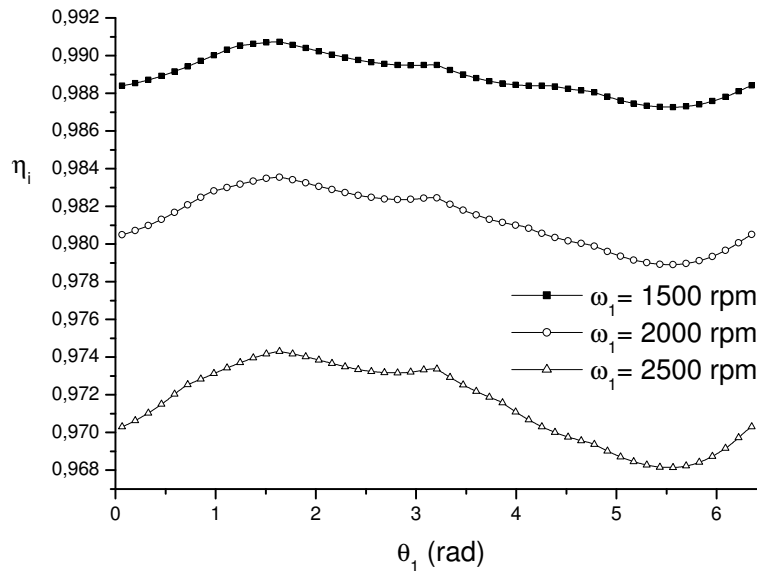
Tabella 1: Caratteristiche inerziali dei membri in unità del S.I.

	x	y	z
$\{S_1\}^{(2)}$	0.117	0.104	-0.053
$\{S_2\}^{(3)}$	0.081	0.081	0
$\{S_3\}^{(4)}$	0.127	0.127	0

$[J_1]^{(2)}$	x	y	z
x	0.01068	0	0
y	0	0.00784	0.00291
z	0	0.00291	0.00494

$[J_2]^{(3)}$	x	y	z
x	0.05525	0	0
y	0	0.005988	0
z	0	0	0.001056

$[J_3]^{(4)}$	x	y	z
x	0.00928	0	0
y	0	0.0111	0
z	0	0	0.003826



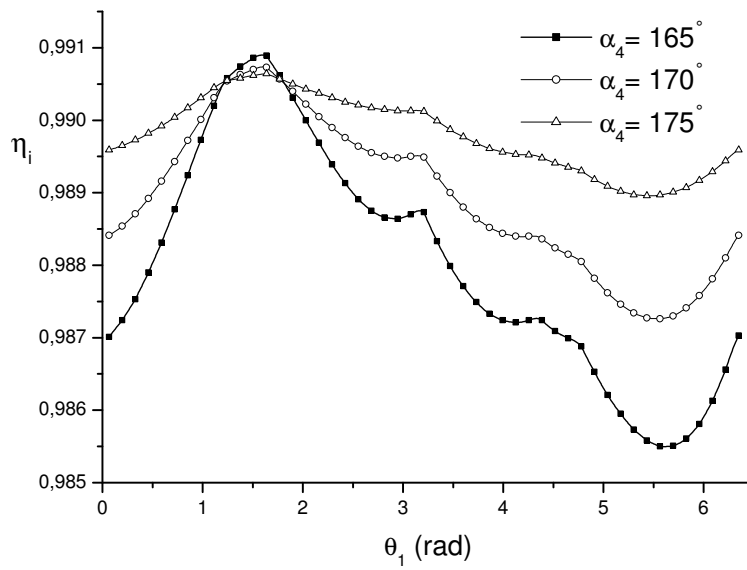


Figura 4: Influenza sul rendimento istantaneo della velocità angolare e dell'inclinazione degli assi dell'albero movente e cedente. I risultati riportati nel grafico in basso si riferiscono ad una simulazione con velocità angolare pari a  $\omega_1=1500$  rpm. Gli errori dimensionali ipotizzati nei calcoli sono  $a_i=0.5$  mm e  $\alpha_i=0.001$  rad.

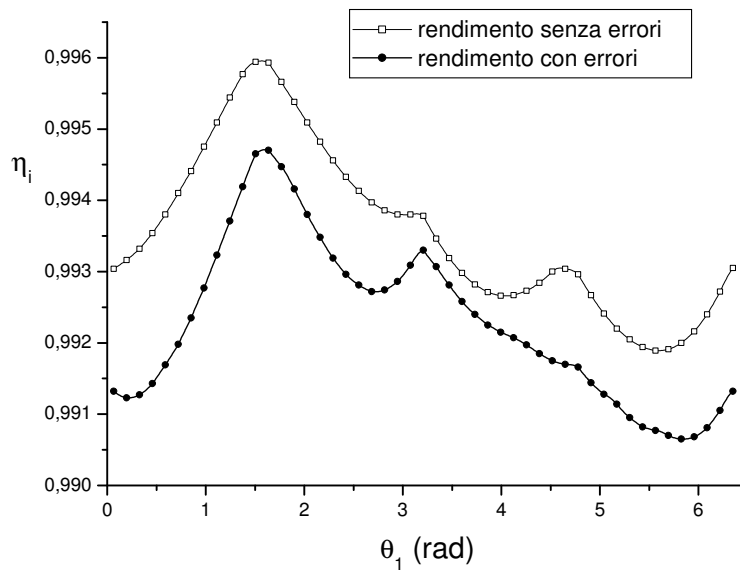


Figura 5: Influenza degli errori dimensionali dei membri sul rendimenti del giunto cardanico

## 7. CONCLUSIONI

I grafici presentati in Figura 4 consentono di valutare quantitativamente i prevedibili effetti negativi che hanno sul rendimento:

- l'incremento del regime di rotazione;
- l'angolo tra gli assi;
- i difetti dimensionali sui membri;

Un confronto tra i grafici rivela che l'aumento del regime di rotazione da 1500 rpm a 2500 rpm provoca una diminuzione media del rendimento dell'1.8% circa, mentre la presenza dell'errore cinematico altera il rendimento dello 0.15% circa. Tale situazione resta giustificata dalla modesta variazione delle reazioni vincolari per effetto degli errori, così come testimoniato dal confronto dei grafici di Figura 3.

E' in via di allestimento presso il Dipartimento di Ingegneria Meccanica dell'Università di Roma Tor Vergata un banco prova per l'analisi sperimentale del rendimento meccanico di giunti per applicazioni automobilistiche. I dati raccolti serviranno sia a validare i modelli teorici qui presentati che ad affinarli.

## Riferimenti bibliografici

- [1] Duditza, F., *Transmissions par Cardan*, Editions Eyrolles, Paris, 1971.
- [2] Biancolini, M.E, Brutti, C., Pennestrì, E., Valentini, P.P., Dynamic, Mechanical Efficiency and Fatigue Analysis of the Double Cardan Homokinetic Joint, to appear in *International Journal of Vehicle Design*.
- [3] Pennestrì, E., Vita, L., Mechanical Efficiency Analysis of a Cardan Joint with Manufacturing Tolerances, *Proceedings RAAD03, 12th Int. Workshop on Robotics in Alpe-Adria- Danube Region*, Cassino, May 7-10 2003, Paper n.053RAAD03.
- [4] Fischer, I., Freudenstein, F., Internal Force and Moment Transmission in a Cardan Joint with Manufacturing Tolerances, *ASME Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design*, vol.106, December 1984, pp.301-311.
- [5] Chen, C.K., Freudenstein, F., Dynamic Analysis of a Universal Joint with Manufacturing Tolerances, *ASME Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design*, vol.108, December 1986, pp.524-532.
- [6] Freudenstein, F., Macey, J.P., The Inertia Torques of the Hooke Joint, *Proc. Of the 21st Biennial ASME Mechanisms Conference*, Chicago, September 16-19, 1990, DE-Vol.24, pp.407-413.
- [7] Fischer, I., *Dual-Number Methods in Kinematics, Statics and Dynamics*, CRC Press, Boca Raton, FL, 1999.
- [8] Shih, C.W., Shih, M. Y., Haug, E.J., Dynamics of Mechanical Systems with Coulomb Friction, Stiction, Impact and Constraint Deletion - III, *Mechanism and Machine Theory*, vol.21, 1986, pp.417-425.
- [9] Dhanaraj, C., Sharan, A.M., Efficient Modeling of Rigid Link Body Dynamic Problems with Friction, *Mechanism and Machine Theory*, vol.30, 1995, pp.749-764.
- [10] Yang, A.T., *Application of Quaternion Algebra and Dual Numbers to the Analysis of Spatial Mechanisms*, Doctoral Dissertation, Columbia University, New York, 1963.
- [11] Yang, A.T., Freudenstein, F., Application of Dual-Number Quaternion Algebra to the Analysis of Spatial Mechanisms, *ASME Journal of Applied Mechanics*, June 1964, pp.300-308.
- [12] Yang, A.T., Acceleration Analysis of Spatial Four-Link Mechanisms, *ASME Journal of Engineering for Industry*, August 1966, pp.296-300.
- [13] Fischer, I.S., *Dual-Number Methods in Kinematics, Statics and Dynamics*, CRC Press, Boca Raton, 1998.