

Esperienze numeriche sulla formulazione multibody di Udwadia-Kalaba

D. de Falco

II Università di Napoli, Aversa

E-mail:domenico.defalco@uniroma2.it

E. Pennestrì

Università di Roma Tor Vergata, Roma

E-mail:pennestri@mecc.uniroma2.it

L. Vita

Università di Roma Tor Vergata, Roma

E-mail:vita@ing.uniroma2.it

Keywords: Multibody dynamics, , Screw mechanisms

SUMMARY:

1 INTRODUZIONE

Avvalendosi del principio del vincolo minimo di Gauss, Udwadia e Kalaba [1, 2] hanno recentemente proposto una formulazione multibody che offre numerosi vantaggi, soprattutto sotto il profilo computazionale. In particolare, le principali caratteristiche della formulazione multibody in argomento sono:

- deduzione delle equazioni del moto sotto forma di un sistema costituito da equazioni differenziali ordinarie, anche qualora venga impiegato un insieme di coordinate sovrabbondanti per descrivere la cinematica dei corpi del sistema;
- capacità di simulare sistemi che presentano un grado di libertà o topologia variabile;
- possibilità di formulare sia problemi di cinematica diretta che inversa impiegando sempre lo stesso software;
- semplicità nell'implementazione;
- efficacia didattica.

La formulazione è alternativa ad altre quali, ad esempio, quelle fondate sull'impiego della decomposizione SVD, della decomposizione QR o sul partizionamento delle coordinate.

Poiché una fase significativa della formulazione richiede il calcolo di una matrice pseudoinversa, scopo del presente lavoro è quello sia di eseguire un confronto tra l'efficienza numerica della formulazione di Udwadia-Kalaba e quelle sopra menzionate sia di valutare l'influenza che vari metodi di calcolo della matrice pseudoinversa hanno su tale efficienza.

A tal fine, è stato implementato un software multibody, denominato Gauss2D, in grado di eseguire, oltre che l'analisi cinematica di meccanismi articolati piani, anche analisi dinamiche di tipo diretto ed inverso.

2 IL PRINCIPIO DI GAUSS PER UN SISTEMA DI PUNTI

Il *principio del minimo sforzo* enunciato da Gauss si esaurisce nella seguente proposizione:

“È molto notevole che quando un moto non può svolgersi liberamente a causa dei vincoli, la natura lo modifica esattamente nella stessa maniera in cui il matematico, con il metodo dei minimi quadrati, mette in accordo con i dati sperimentali le relazioni note tra grandezze fisiche indipendenti.”

Pertanto, indicata con

- F_k la componente della risultante delle forze su un punto del sistema costituito da n masse puntiformi;

- m_k la massa del punto materiale;
- \ddot{x}_k la generica componente dell'accelerazione assoluta di un punto materiale;

ed introdotta la funzione

$$Z = \sum_{k=1}^{3n} \left(\ddot{x}_k - \frac{F_k}{m_k} \right)^2, \quad (1)$$

che esprime la deviazione dal *moto libero*, dovremo imporre su questa la condizione di minimo prevista dal principio in argomento.

In particolare, nel caso il sistema sia soggetto a condizioni di vincolo del tipo

$$\Psi_i(x_1, x_2, \dots, x_{3n}) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, r), \quad (2)$$

si dovrà anche tener conto delle r condizioni aggiuntive

$$[\Psi_x] \{\delta x\} = \{0\}. \quad (3)$$

D'altro canto, se si derivano quest'ultime rispetto al tempo avremo

$$[\Psi_x] \{\delta \dot{x}\} = \{0\}, \quad (4)$$

in quanto le posizioni e le velocità dei punti che costituiscono il sistema sono istantaneamente assegnati.

In definitiva, dalla (1), stante la (4), adottando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange si ha, posto $\{F\} = \{F_1 \ F_2 \ \dots \ F_{3n}\}^T$,

$$\delta Z = \left([m] \{\dot{x}\} + [\Psi_x]^T \{\lambda\} - \{F\} \right)^T \{\delta \dot{x}\} = 0,$$

ovvero le note equazioni differenziali del moto

$$[m] \{\dot{x}\} + [\Psi_x]^T \{\lambda\} = \{F\}, \quad (5)$$

ove $\{\lambda\}$ è il vettore dei moltiplicatori di Lagrange.

3 EQUIVALENZA TRA IL PRINCIPIO DI GAUSS ED I PRINCIPI DI d'ALEMBERT-LAGRANGE E JOURDAIN

Lagrange potè esprimere il suo celeberrimo principio della meccanica analitica per un sistema il cui spazio di configurazione, definito dal vettore $\vec{r} = [x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_{3n}]^T$, è soggetto ad equazioni di vincolo del tipo (2), nella seguente forma variazionale differenziale:

$$\sum_k (F_k - m_k \ddot{x}_k) \cdot \delta x_k = 0 \quad (6)$$

La (6) esprime implicitamente la condizione di *vincolo ideale* per il quale, in corrispondenza di un qualsiasi spostamento virtuale del sistema di componenti δx_k , non compie lavoro la reazione di vincolo associata $R_k = -(F_k - m_k \ddot{x}_k)$.

Quello di d'Alembert-Lagrange, espresso dalla (6), è considerato il principio base della meccanica analitica per i sistemi soggetti a *vincoli ideali*; appare tuttavia ragionevole indagare sull'equivalenza tra tale principio e quella dei principi variazionali successivamente proposti quali, in particolare, il principio di Gauss e di Jourdain.

Nella (6), per ogni posizione del sistema durante il suo moto, il confronto avviene tra due spostamenti infinitesimi simultanei ($\delta t = 0$) che il sistema può compiere cinematicamente (ovvero compatibili con i vincoli olonomi). Come è noto, fissata la posizione x_k del sistema all'istante t , diremo $(dx_k)_1$ e $(dx_k)_2$ spostamenti infinitesimi possibili a partire da tale posizione, se verificano le equazioni (4) dei vincoli olonomi differenziate, ovvero:

$$\begin{aligned} \sum_k \frac{\partial \Psi_i}{\partial x_k} \cdot (dx_k)_1 + \frac{\partial \Psi_i}{\partial t} &= 0 \\ \sum_k \frac{\partial \Psi_i}{\partial x_k} \cdot (dx_k)_2 + \frac{\partial \Psi_i}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Definito lo spostamento virtuale $\delta x = (dx_k)_1 - (dx_k)_2$, sottraendo una all'altra le (7), si ha:

$$\sum_k \frac{\partial \Psi_i}{\partial x_k} \cdot \delta x_k = 0 \quad (8)$$

I vincoli non olonomi del tipo

$$\Psi(r, \dot{r}, t) = 0 \quad (9)$$

invece, non limitano solo le configurazioni del sistema bensì anche le sue velocità nelle configurazioni possibili del sistema definite dai vincoli olonomi, ragion per cui, diversamente da un sistema olonomo, spostamenti tra posizioni adiacenti infinitamente vicine possono essere impossibili. Per tale motivo nei sistemi non olonomi, gli spostamenti possibili non coincidono con le variazioni formali delle coordinate, sebbene siano indicati nello stesso modo.

Dunque nei principi di Jourdain e Gauss l'insieme dei moti compatibili con i vincoli a partire da una configurazione del sistema è un sottoinsieme di quelli compatibili nel principio di D'Alembert-Lagrange. In quello di Jourdain, il moto effettivo è comparato soltanto a quelli infinitamente vicini ma per i quali le coordinate al tempo t hanno gli stessi valori del moto effettivo.

Jourdain propose di confrontare, sempre simultaneamente, i moti per i quali, fissati i vettori posizione \mathbf{x} effettivi, le variazioni

In quello di Gauss, il moto effettivo è comparato soltanto a quelli infinitamente vicini ma per i quali le velocità al tempo t hanno gli stessi valori che hanno nel moto effettivo. D'ora in poi si utilizzeranno i pedici "J" e "G" per il simbolo di variazione δ rispettivamente per il caso di Jourdain e quello di Gauss.

Nel caso della variazione di Jourdain dei vincoli (6), fissati il tempo t e x_k con $\delta_J t = 0$ e $\delta_J x_k = 0$, assegnate le variazioni infinitesime $\delta_J \dot{x}_k$ si ha:

$$\sum_k \frac{\partial \Psi_i}{\partial \dot{x}_k} \cdot \delta_J \dot{x}_k = 0 \quad (10)$$

Nel caso della variazione di Gauss dei vincoli (6), fissati il tempo t , x_k e \dot{x}_k con $\delta_G t = 0$, $\delta_G x_k = 0$ e $\delta_G \dot{x}_k = 0$, assegnate le variazioni infinitesime $\delta_G \ddot{x}_k$ si ha:

$$\sum_k \frac{\partial \Psi_i}{\partial \ddot{x}_k} \cdot \delta_G \ddot{x}_k = 0 \quad (11)$$

Di conseguenza nelle variazioni di Jourdain e Gauss, poste le variazioni $\delta_J x_k = \delta_G x_k = 0$ al tempo t , si confrontano le velocità possibili \dot{x}'_k e \dot{x}_k e le accelerazioni possibili \ddot{x}'_k e \ddot{x}_k rispettivamente in una certa configurazione del moto effettivo.

In ogni caso, al tempo infinitamente vicino $t + dt$, le posizioni dei punti del sistema nei moti che sono comparati saranno diversi. Cioè, al tempo $t + dt$, le coordinate in tali moti differiranno nella variazione di Jourdain delle quantità:

$$\delta x_k = (\dot{x}'_k - \dot{x}_k) dt = \delta_J \dot{x}_k dt \quad (12)$$

e in quella di Gauss delle quantità :

$$\delta x_k = (\ddot{x}'_k - \ddot{x}_k) (dt)^2 = \frac{1}{2} \delta_G \ddot{x}_k (dt)^2 \quad (13)$$

Le (12) e (13) definiscono gli spostamenti possibili δx_k al tempo $t + dt$, in funzione delle variazioni assegnate $\delta_J \dot{x}_k$ e $\delta_G \ddot{x}_k$. Poiché queste ultime soddisfano le condizioni (10) e (11), gli spostamenti possibili definiti dalle (12) e (13) soddisfano ovviamente la condizione di Chetaev (7).

Quindi le variazioni nel senso di Jourdain e Gauss conducono necessariamente alla condizione di Chetaev per gli spostamenti possibili.

Nel caso di vincoli finiti (2) e vincoli differenziali del tipo (6) ma lineari, ovvero che possano mettersi nella forma:

$$\sum_j \delta_{pj}(x_k, t) \cdot \dot{x}_j + \delta_p(x_k, t) = 0 \quad (14)$$

la condizione di Chetaev (7) coincide con la condizione generalmente accettata $\sum_k \frac{\partial \Psi_i}{\partial x_k} \cdot \delta x_k = 0$ e quindi è possibile ottenere i δx_k semplicemente con una variazione formale delle equazioni di vincolo. Ciò non accade invece, nel caso in cui i vincoli differenziali non sono lineari. Infatti poiché i vincoli differenziali (6) limitano solo le velocità, gli spostamenti possibili del sistema da qualche posizione possibile ad un dato istante t possono avvenire soltanto nelle direzioni delle velocità possibili a vincoli “congelati”, ovvero vincoli espressi dalle equazioni (6) in cui le coordinate ed il tempo sono visti come semplici parametri. Per tale motivo le variazioni delle equazioni (6) devono essere effettuate solo rispetto alle velocità in accordo con l’equazione (10) e non rispetto a tutte le variabili, così come si è proceduto pervenendo all’equazione (7). Infatti nel caso in cui i vincoli non olonomi fossero lineari nelle velocità ovvero esprimibili nella forma (14), le equazioni rappresentano dei piani nello spazio $\{\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_k, \dots, \dot{x}_{3n}\}$ e pertanto gli spostamenti possibili δx_k sono nella direzione dei vettori delle normali a tali piani. Nel caso di vincoli non lineari invece essi sono ortogonali alle normali $\frac{\partial \Psi}{\partial \dot{x}_k}$ alle superfici da esse rappresentate e quindi non coincidono più con i raggi vettori che li rappresenterebbero invece se si effettuasse una variazione formale delle equazioni di vincolo rispetto a tutte le variabili.

4 LA FORMULAZIONE DI UDWADIA-KALABA PER SISTEMI DI CORPI RIGIDI

Nel presente paragrafo la formulazione di Udwadia-Kalaba verrà dedotta secondo la procedura descritta da Arabyan and Wu [2].

Si introduca la seguente nomenclatura:

- $\{F\}$ il vettore delle forze esterne generalizzate;
- $[M]$ la matrice delle masse;
- $[\Psi_q]$ la matrice Jacobiana delle equazioni di vincolo;
- $\{q\}$ il vettore delle coordinate generalizzate;
- $\{\gamma\} = -([\Psi_q] \{\dot{q}\})_q \{\dot{q}\} - 2[\Psi_{qt}] \{\dot{q}\} - \{\Psi_{tt}\}$;
- l’apice + indica l’operazione di pseudoinversa.

Com’è noto, la dinamica di un sistema di corpi soggetti a vincoli è descritta dal seguente sistema di equazioni algebrico-differenziali (DAE)

$$\begin{bmatrix} M & \Psi_q^T \\ \Psi_q & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q} \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ \gamma \end{Bmatrix} \quad (15)$$

La matrice a primo membro può essere invertita a blocchi (v. [?]), cosicché

$$\begin{bmatrix} M & \Psi_q^T \\ \Psi_q & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} M^{-1} - M^{-1} \Psi_q^T (\Psi_q M^{-1} \Psi_q^T)^{-1} \Psi_q M^{-1} & M^{-1} \Psi_q^T (\Psi_q M^{-1} \Psi_q^T)^{-1} \\ (\Psi_q M^{-1} \Psi_q^T)^{-1} \Psi_q M^{-1} & -(\Psi_q M^{-1} \Psi_q^T)^{-1} \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Introdotta il vettore

$$\{\ddot{q}_f\} = [M]^{-1} \{F\}, \quad (17)$$

che rappresenta il vettore accelerazione del sistema svincolato, la soluzione di (15) risulta essere

$$\{\ddot{q}\} = \{\ddot{q}_f\} + [M]^{-1} [\Psi_q]^T \left([\Psi_q] [M]^{-1} [\Psi_q]^T \right)^{-1} (\{\gamma\} - [\Psi_q] \{\ddot{q}_f\}) \quad (18)$$

e

$$\{\lambda\} = \left([\Psi_q] [M]^{-1} [\Psi_q]^T \right)^{-1} (\{\gamma\} - [\Psi_q] \{\ddot{q}_f\}). \quad (19)$$

Se poniamo

$$[M]^{-1} = [M]^{-\frac{1}{2}} [M]^{-\frac{1}{2}}, \quad (20)$$

$$[D] = [\Psi_q] [M]^{-\frac{1}{2}}, \quad (21)$$

l'equazione (18) si riscrive nella forma

$$\begin{aligned} \{\dot{q}\} &= \{\ddot{q}_f\} + [M]^{-\frac{1}{2}} \left([M]^{-\frac{1}{2}} [\Psi_q]^T \right) \left([\Psi_q] [M]^{-\frac{1}{2}} [M]^{-\frac{1}{2}} [\Psi_q]^T \right)^{-1} (\{\gamma\} - [\Psi_q] \{\ddot{q}_f\}) , \\ &= \{\ddot{q}_f\} + [M]^{-\frac{1}{2}} [D]^T \left([D] [D]^T \right)^{-1} (\{\gamma\} - [\Psi_q] \{\ddot{q}_f\}) \end{aligned} \quad (22)$$

Considerata la definizione di matrice pseudoinversa destra, potremo affermare

$$[D]^+ = [D]^T \left([D] [D]^T \right)^{-1} , \quad (23)$$

e la precedente equazione può si esprimere come segue [2]:

$$\{\ddot{q}\} = \{\ddot{q}_f\} + [M]^{-\frac{1}{2}} [D]^+ (\{\gamma\} - [\Psi_q] \{\ddot{q}_f\}) . \quad (24)$$

Tale formulazione, proposta da Udwadia and Kalaba [?] a partire dal principio di Gauss, può essere anche stabilizzata adottando il criterio di Baumgarte. Pertanto, indicati con α e β i parametri di Baumgarte, la (24) si modifica come segue:

$$\{\ddot{q}\} = \{\ddot{q}_f\} + [M]^{-\frac{1}{2}} [D]^+ (\{\gamma\} - 2\alpha \{\dot{\Psi}\} - \beta^2 \{\Psi\} - [\Psi_q] \{\ddot{q}_f\}) . \quad (25)$$

5 CENNI SUI METODI PER IL CALCOLO DELLA MATRICE PSEUDOINVERSA DI MOORE-PENROSE

This section, for completeness, summarizes the main properties of the Moore-Penrose pseudoinverse matrix and the steps of the different algorithms tested during the dynamic simulations.

Dicesi matrice pseudoinversa $[A]^+$ di Moore-Penrose di un'assegnata matrice $[A]$ quella che soddisfa le seguenti proprietà:

- $([A] [A]^+)^T = [A] [A]^+$
- $([A]^+ [A])^T = [A]^+ [A]$
- $[A] [A]^+ [A] = [A]$
- $[A]^+ [A] [A]^+ = [A]^+$

Com'è noto, la matrice Moore-Penrose è associata alla soluzione, con il criterio dei minimi quadrati, del sistema lineare:

$$[A] \{x\} = \{b\} , \quad (26)$$

ove il numero m di equazioni¹ è diverso da quello n delle incognite. Si osserva che la matrice $[A]$ non ha necessariamente rango pieno.

Possono distinguersi i seguenti casi:

Sistema sovradeterminato (*i.e.* $m > n$)

Richiedendo che

$$h \equiv \|[A] \{x\} - \{b\}\|_2^2 \quad (27)$$

attinga un minimo, otteniamo

$$[A]^T [A] \{x\} = [A]^T \{b\} . \quad (28)$$

Pertanto, la soluzione di (26) assume l'espressione

$$\{x\} = [A]^+ \{b\} , \quad (29)$$

¹Si assume che le equazioni siano tra loro tutte congruenti.

ove con

$$[A]^+ = \left([A]^T [A] \right)^{-1} [A]^T \quad (30)$$

si designa la *matrice pseudoinversa destra*.

Sistema di equazioni sottodeterminato ($m < n$)

La soluzione si ottiene imponendo un soluzione con norma euclidea minima, ovvero

$$g \equiv \|x\|_2^2, \quad (31)$$

con $\{x\}$ soggetta alle condizioni (26). Pertanto, introdotta la nuova funzione obiettivo

$$g' \equiv g + \{\lambda\}^T ([A] \{x\} - \{b\}) \quad (32)$$

la soluzione si ottiene da

$$\begin{bmatrix} I & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ b \end{Bmatrix}, \quad (33)$$

ovvero

$$\{x\} = [A]^+ \{b\}, \quad (34)$$

quando si indichi con

$$[A]^+ = [A]^T \left([A][A]^T \right)^{-1}, \quad (35)$$

la *matrice pseudoinversa sinistra*.

5.1 The least squares method

Nella precedente trattazione si è mostrato come come alla soluzione del sistema

$$[A] \{x\} = \{b\}, \quad (36)$$

sia associato il calcolo della matrice $[A]^+$. Usualmente i metodi di soluzione fondati sul criterio dei minimi quadrati si avvalgono della decomposizione QR, ottenuta tramite il metodo di Householder o l'ortogonalizzazione di Gram-Schmidt (GS). Dunque, posto

$$\begin{aligned} \{b_1\} &= \{ 1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \}^T, \\ \{b_2\} &= \{ 0 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0 \}^T, \\ \{b_3\} &= \{ 0 \ 0 \ 1 \ \dots \ 0 \}^T, \\ &\dots\dots \\ \{b_m\} &= \{ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 1 \}^T. \end{aligned}$$

la procedura di calcolo della matrice pseudoinversa differisce secondo le dimensioni di $[A]$.

Caso $m > n$

1. Si risolve m volte² il sistema

$$[A]^T [A] \{x\} = [A]^T \{b\}. \quad (37)$$

2. Dalle m soluzioni $\{x_1\}, \{x_2\}, \dots, \{x_m\}$ si forma la matrice pseudoinversa

$$[A]^+ = [\{x_1\} \ \{x_2\} \ \{x_3\} \ \dots \ \{x_m\}] \quad (38)$$

Case $n \geq m$

1. Si risolve m volte il sistema

$$\begin{bmatrix} I & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ b \end{Bmatrix} \quad (39)$$

Anche in questo caso la pseudoinversa data dall'equazione (38).

Poiché le matrici che figurano nelle espressioni (37) e (39) sono quasi singolari, alla loro soluzione si consiglia di procedere attraverso l'ortogonalizzazione di Gram-Schmidt (GS) o la fattorizzazione QR di Householder.

²In pratica il sistema risolto una sola volta poiché. Le matrici fattore sono conservate.

5.2 Calcolo matrice pseudoinversa mediante fattorizzazione di Gram-Schmidt

Grazie a tale proprietà, un semplice metodo per il calcolo della matrice inversa generalizzata $[A]$ con vettori colonna indipendenti consiste nell'eseguire su tale matrice la decomposizione di Gram-Schmidt, ottenendo così

$$[A]_{m \times n} = [Q]_{m \times n} [R]_{n \times n}, \quad (40)$$

con $[R]$ matrice triangolare quadrata a rango pieno e $[Q]$ matrice unitaria. Quindi, tenuta presente la proprietà sulla generalizzata inversa di prodotti di matrici, si esegue il prodotto

$$[A]^+ = ([Q][R])^+ = [R]^+ [Q]^+ = [R]^{-1} [Q]^T. \quad (41)$$

Poiché la matrice $[R]$ è triangolare, si suggerisce, per aumentare l'efficienza computazionale, di impiegare algoritmi specifici per l'inversione.

5.3 Calcolo matrice pseudoinversa mediante decomposizione SVD

La decomposizione SVD consente di decomporre la matrice $[A]$ di rango r nel prodotto

$$[A]_{m \times n} = [V]_{m \times m} [\Lambda]_{m \times n} [U]_{n \times n}^T, \quad (42)$$

È possibile esprimere la SVD in forma ridotta. In particolare, posto

$$[V] = \begin{bmatrix} V_{1(m \times r)} & V_{2(m \times (m-r))} \end{bmatrix}, \quad (43)$$

$$[\Lambda] = \begin{bmatrix} \Lambda_{1(r \times r)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (44)$$

$$[U]^T = \begin{bmatrix} U_{1(r \times n)}^T \\ U_{2((n-r) \times n)}^T \end{bmatrix}, \quad (45)$$

si dimostra essere

$$[A] = [V]_{m \times r} [\Lambda]_{r \times r} [U]_{r \times n}^T. \quad (46)$$

Ricordando le proprietà di cui godono le matrici $[V_1]$ ed $[U_1]$, la pseudoinversa di $[A]$ discende dal prodotto

$$[A]^+ = [U_1] [\Lambda_1]^{-1} [V_1]^T. \quad (47)$$

5.4 Calcolo matrice pseudoinversa con il metodo di Varga

Sia $[A]$ una matrice $m \times n$ di cui si vuole calcolare la pseudoinversa. I passi dell'algoritmo sono i seguenti:

1. Si esegue la decomposizione QR della matrice $[A]$, ottenendo così

$$[A] = [U][G] = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ove $[G_1]$ con righe tutte indipendenti ed $[U]^T [U] = [I_m]$.

2. Si esegue una nuova decomposizione QR di $[A]$

$$[G_1]^T = [V]^T \begin{bmatrix} G_2^T \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (48)$$

con $[G_2]^T$ matrice invertibile, mentre $[V][V]^T = [I_n]$.

3. Si verifica facilmente che è

$$[A] = [U] \begin{bmatrix} G_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} [V],$$

per cui

$$[A]^+ = [V]^T \begin{bmatrix} G_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} [U]^T. \quad (49)$$

5.5 Calcolo matrice pseudoinversa mediante algoritmo di Greville

I passi dell'algoritmo sono di seguito descritti:

1. Si decompone la matrice $[A]_{m \times n}$ nei suoi vettori riga $\{a_i\} (i = 1, 2, \dots, m)$, cosicch 

$$[A] = [a_1^T \quad a_2^T \quad \dots \quad a_m^T]^T$$

2. Si ponga

$$[A_i]_{i \times n} = \begin{bmatrix} A_{i-1} \\ a_i \end{bmatrix}, \quad (50)$$

con $[A_1]_{1 \times n} = \{a_1\}_{1 \times n}$.

3. Per $i = 2, \dots, m$ si valuti la matrice $[A_i]^+$ per il tramite della relazione

$$[A_i]_{n \times i}^+ = \left[[A_{i-1}]^+ - \{b_i\}^T \{d_i\} \mid \{b_i\}^T \right], \quad (51)$$

in cui

$$\begin{aligned} \{d_i\}_{1 \times (i-1)} &= \{a_i\} [A_{i-1}]^+ \\ \{c_i\}_{1 \times n} &= \{a_i\} - \{d_i\} [A_{i-1}] \\ \{b_i\}_{1 \times n} &= \begin{cases} \frac{\{c_i\}}{\{c_i\}\{c_i\}^T} & (\|c_i\| \neq 0) \\ \frac{\{d_i\}[A_{i-1}]^+}{1 + \{d_i\}\{d_i\}^T} & (\|c_i\| = 0) \end{cases} \\ [A_1]^+ &= \begin{cases} \frac{\{a_1\}^T}{\{a_1\}\{a_1\}^T} & (\|a_1\| \neq 0) \\ \{a_1\}^T & (\|a_1\| = 0) \end{cases} \end{aligned}$$

4. Dopo m cicli la $[A_m]^+$ fornisce la matrice pseudoinversa $[A]_{n \times m}^+$ di $[A]$.

6 II PROGRAMMA GAUSS2D

7 ESEMPIO NUMERICO

La formulazione di Udwadia-Kalaba stata applicata alla simulazione dinamica del doppio parallelogramma smorzato schematizzato in Figura 2.

Lunghezza, massa e momento d'inerzia baricentrico delle tre aste parallele sono $L=1$, $m=1$ and $I=0.1$, rispettivamente. Lunghezza, massa e momento d'inerzia baricentrico della biella sono $L_2=2$, $m_2=2$, $I_2=0.2$. Tutte le aste hanno baricentro nella mezzeria e sono soggette alla forza di gravit .

La rigidezza delle molle   pari a $k=30$ (lunghezza iniziale della molla $\ell=1$), mentre lo smorzamento viscoso   pari a $c=0.9$. Inizialmente l'asta forma con il telaio un angolo pari a $q_3 = -135^\circ$ ed ha velocit  angolare nulla. L'andamento della coordinata angolare   mostrato in Figura

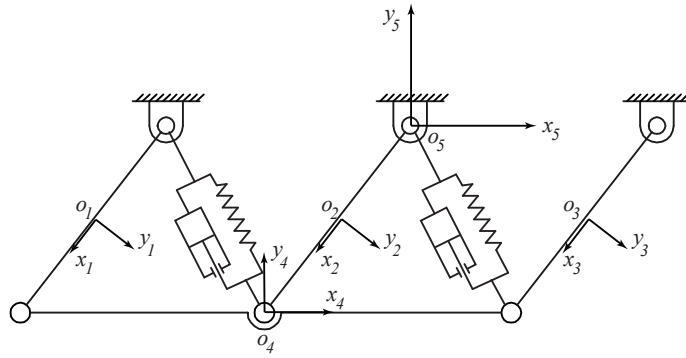


Figura 1: Doppio parallelogramma smorzato

Tabella 1: $TOL=10^{-10}$. Integration method: Adams-Moulton. Initial time step, $\Delta t = 0.66 \cdot 10^{-2}$ s. No Baumgarte stabilization applied.

Method	Result	$\sum_i \Psi_i^2$	NFUNC	NSTEPS	CPU
SVD	Fails ¹	$3.7 \cdot 10^{-7}$	-	-	-
Varga	Fails ²	$9.9 \cdot 10^{-2}$	-	-	-
Greville	Correct up to 17.5 s	$4.5 \cdot 10^{-5}$	2,961,955	2,633,811	0.93
LS-Householder	Correct up to 16.5 s	$2.3 \cdot 10^{-4}$	6,131,159	4,177,395	11.57
LS-Modified GS	Correct up to 17.0 s	$1.1 \cdot 10^{-4}$	3,749,766	3,015,354	36.85

¹ After 9.1 s of correct simulation, the integration subroutine is halted because of repeated error-test failures (see [?], p. 668).

² After 8.0 s of correct simulation, the integration subroutine is halted after failing to pass the error-test failures (see [?], p. 668).

Riferimenti bibliografici

- [1] Udwadia, F.E., Kalaba, R.E., *Analytical Dynamics - A New Approach*, Cambridge University Press, 1996.
- [2] Ara Arabyan, Fei Wu, An Improved Formulation for Constrained Mechanical Systems, *Multibody System Dynamics*, vol.2, 1998, pp.49-69.

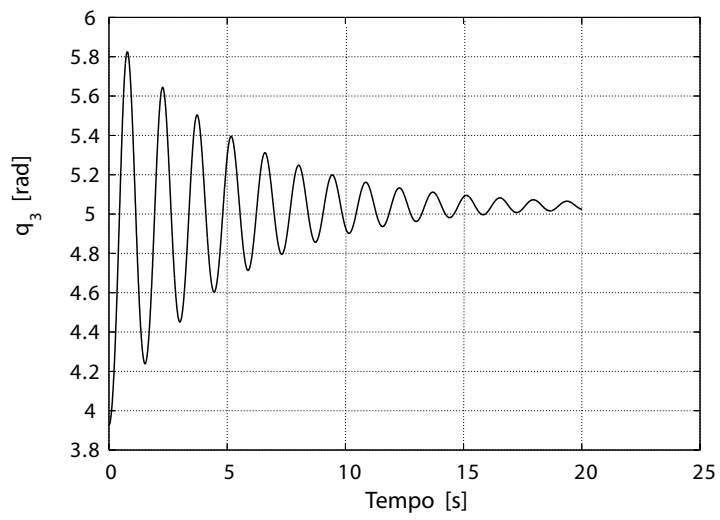


Figura 2: Doppio parallelogramma smorzato