

Appunti dalle Lezioni  
del  
Prof. Ettore Pennestri'

ovvero, stante le (1.97) e (1.99),

$$\begin{aligned} {}^0_j A [{}^j \tilde{\omega}_j] &= {}^0_i A [{}^i \tilde{\omega}_i] {}^i_j A + {}^0_i A [{}^i \tilde{\omega}_{ji}] {}^i_j A \\ &= {}^0_i A [{}^i \tilde{\omega}_i] [{}^0_i A]^T [{}^0_j A] + {}^0_i A [{}^i \tilde{\omega}_{ji}] [{}^0_i A]^T [{}^0_j A] \\ &= - [{}^i \tilde{\omega}_i] [{}^0_j A] - [{}^0 \tilde{\omega}_{ji}] [{}^0_j A] . \end{aligned}$$

Quindi, essendo

$${}^0_j A [{}^j \tilde{\omega}_j] [{}^0_j A]^T = - [{}^0 \tilde{\omega}_j] ,$$

segue

$$- [{}^0 \tilde{\omega}_j] = - [{}^0 \tilde{\omega}_i] [{}^0_j A] [{}^0_j A]^T - [{}^0 \tilde{\omega}_{ji}] [{}^0_j A] [{}^0_j A]^T ,$$

relazione equivalente alla (1.96) in quanto  $[{}^0_j A] [{}^0_j A]^T = [I]$ .

Stante la proprietà additiva di cui godono i vettori velocità angolare, quella assoluta del corpo  $i$ ,  $\{{}^0 \omega_i\}$ , potrà ottenersi quale somma delle velocità angolari relative dei corpi (o dei rispettivi riferimenti) intermedi tra  $i$  medesimo ed il telaio. Appare superfluo ribadire che le componenti delle velocità angolari relative per poter essere correttamente sommate dovranno essere espresse nel medesimo sistema di riferimento.

## 1.10 Composizione di due atti di moto rotatori

Assegnati ad un corpo rigido due atti di moto di rotazione, si vogliono determinare le caratteristiche cinematiche del moto risultante. Nel caso più generale gli assi dei moti di rotazione infinitesima saranno sghembi. Con riferimento alla geometria della Figura 1.14 il primo atto di moto è una rotazione con velocità angolare  $\vec{\omega}_1$  attorno all'asse  $a_1$ , mentre il secondo è una rotazione con velocità angolare  $\vec{\omega}_2$  attorno ad  $a_2$

Il campo vettoriale di velocità del moto risultante verrà caratterizzato tramite i seguenti:

- velocità angolare  $\vec{\omega}$ ;
- posizione del rispettivo asse centrale
- velocità  $\vec{v}_M$  di un punto  $M$  di tale asse.

La velocità angolare del moto risultante vale

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 \quad (1.101)$$

mentre la velocità del punto  $M$  si ottiene dalla somma

$$\begin{aligned} \vec{v}_M &= \vec{\omega}_1 \times \overrightarrow{A_1 M} + \vec{\omega}_2 \times \overrightarrow{A_2 M} \\ &= \vec{v}_{M_1} + \vec{v}_{M_2} . \end{aligned} \quad (1.102)$$

ove  $A_1$  ed  $A_2$  sono rispettivamente le intersezioni della retta di minima distanza con gli assi  $a_1$  ed  $a_2$ . Le posizioni del punto  $M$  e dell'asse centrale sono per il momento incogniti.

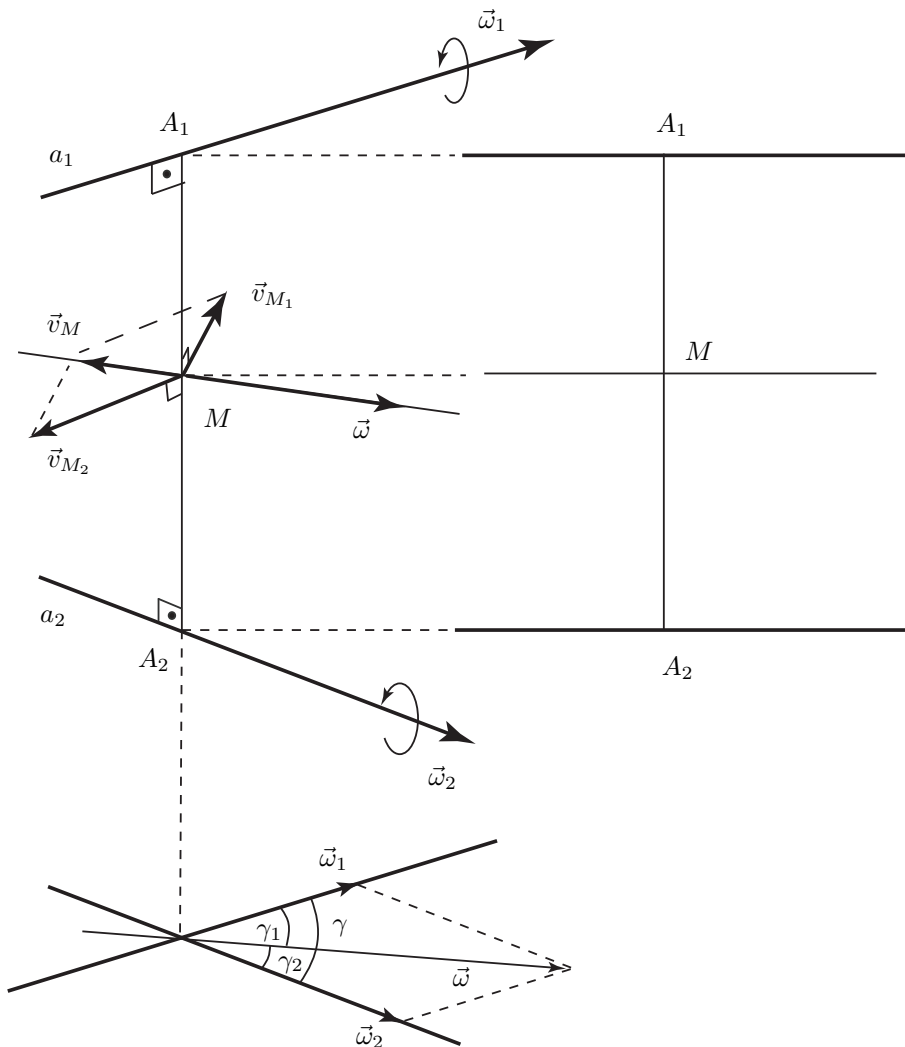


Figura 1.14: Composizione di atti di moto rotatori: Nomenclatura

Per determinare gli angoli  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  che tale asse rispettivamente forma con  $a_1$  ed  $a_2$  utilizzeremo le relazioni

$$\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma \tag{1.103a}$$

$$\frac{\omega_1}{\sin \gamma_1} = \frac{\omega_2}{\sin \gamma_2} \tag{1.103b}$$

la cui deduzione è immediata osservando il triangolo che traduce la somma vettoriale delle velocità angolari.

La condizione di appartenenza di  $M$  all'asse centrale conduce alla

$$\vec{v}_M \times \vec{\omega} = 0$$

il cui sviluppo porge

$$(\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) \times (\vec{\omega}_1 \times \overrightarrow{A_1M} + \vec{\omega}_2 \times \overrightarrow{A_2M}) = 0,$$

ovvero

$$\omega_1 (\omega_1 + \omega_2 \cos \gamma) A_1M + \omega_2 (\omega_2 + \omega_1 \cos \gamma) A_2M = 0,$$

in cui  $A_1M$  ed  $A_2M$  sono da considerare come segmenti orientati con un proprio segno algebrico (*i.e.*  $A_1M = -MA_1$ ).

Tenute presenti le (1.103) la precedente diventa<sup>6</sup>

$$\frac{A_1M}{A_2M} = -\frac{\tan \gamma_2}{\tan \gamma_1} \quad (1.104a)$$

da utilizzare unitamente alla

$$A_1M + MA_2 = d, \quad (1.104b)$$

con  $d$  minima distanza tra  $a_1$  ed  $a_2$ .

In definitiva, la composizione di due rotazioni infinitesime da luogo, in generale, ad un moto elicoidale risultante caratterizzato dalle (1.101), (1.103), (1.103).

Il calcolo del risultante di due generici atti di moto costituisce un caso particolare di quello appena discusso. Tale calcolo verrà presentato utilizzando la teoria dei torsori<sup>7</sup>.

## 1.11 Integrabilità

Le componenti  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  ed  $\omega_z$  della velocità angolare  $\vec{\omega}$ , non essendo le derivate delle componenti di un vettore non possono essere integrate<sup>8</sup>.

Tale situazione giustifica l'introduzione di terne di angoli (*e.g.* angoli di Eulero e di Cardano) in grado di definire l'orientamento e le cui derivate siano integrabili.

Per meglio illustrare quanto detto si inizi col ricordare che il differenziale

$$dz = A dx + B dy \quad (1.105)$$

è integrabile solo se è verificata l'uguaglianza

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}. \quad (1.106)$$

Dalla (1.109)

$$\begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \vartheta \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ \sin \vartheta \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \cos \vartheta & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\vartheta} \\ \dot{\phi} \end{Bmatrix}.$$

si ha

$$\omega_x dt = \sin \phi \sin \vartheta d\psi + \cos \phi d\theta.$$

Tale espressione non è integrabile in quanto

$$\frac{\partial \sin \phi \sin \vartheta}{\partial \theta} \neq \frac{\partial \cos \phi}{\partial \psi},$$

<sup>6</sup>

$$\begin{aligned} \frac{A_1M}{A_2M} &= -\frac{\omega_1}{\omega_2} \frac{1 + \frac{\omega_2}{\omega_1} \cos \gamma}{\frac{\omega_2}{\omega_1} + \cos \gamma} \\ &= -\frac{\sin \gamma_2}{\sin \gamma_1} \frac{1 + \frac{\sin \gamma_1}{\sin \gamma_2} \cos \gamma}{\frac{\sin \gamma_2}{\sin \gamma_1} + \cos \gamma} = -\frac{\sin \gamma_2 + \sin \gamma_1 \cos \gamma_1 \cos \gamma_2 - \sin^2 \gamma_1 \sin \gamma_2 \sin \gamma_2}{\sin \gamma_1 + \sin \gamma_2 \cos \gamma_2 \cos \gamma_1 - \sin^2 \gamma_2 \sin \gamma_1 \sin \gamma_1} \\ &= -\frac{\sin \gamma_2 \cos^2 \gamma_1 + \sin \gamma_1 \cos \gamma_1 \cos \gamma_2 \sin \gamma_2}{\sin \gamma_1 \cos^2 \gamma_2 + \sin \gamma_2 \cos \gamma_2 \cos \gamma_1 \sin \gamma_1} \\ &= -\frac{\cos \gamma_1 (\sin \gamma_2 \cos \gamma_1 + \sin \gamma_1 \cos \gamma_2) \sin \gamma_2}{\cos \gamma_2 (\sin \gamma_1 \cos \gamma_2 + \sin \gamma_2 \cos \gamma_1) \sin \gamma_1} = -\frac{\tan \gamma_2}{\tan \gamma_1} \end{aligned}$$

<sup>7</sup>v. p. 32.

<sup>8</sup>v. p. ??

# Cenni di teoria dei torsori

## 2.1 Introduzione

La teoria dei torsori è fondata su due scoperte indipendenti nei settori della Statica e della Cinematica.

La prima è dovuta a L. Poinsot [36] il quale:

- introdusse il concetto di *coppie di forze* (due vettori liberi di uguale modulo, direzione e versi opposti);
- dimostrò che un qualsiasi sistema di forze agente su un corpo può essere ridotto ad una forza  $\vec{R}$  e ad una coppia di momento  $\vec{M}_O$  agente su un piano ortogonale ad  $\vec{R}$  medesima.

A tale proposito è anche importante osservare che la retta d'azione L di  $\vec{R}$ , coincidente con l'asse centrale del sistema di forze, è unica.

La combinazione del risultante  $\vec{R}$  e della coppia  $\vec{M}_O$ , nonché di L, viene qui denominata<sup>1</sup> *torsore dinamico*

$$\{\tau_O\} \equiv \left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \\ \vec{M}_O \end{array} \right\} \quad (2.1)$$

Il torsore dinamico comprende due vettori:

- il vettore linea  $\vec{R}$ , risultante delle forze la cui retta d'azione costituisce l'asse L;
- il vettore libero  $\vec{M}_O$ , parallelo al primo e rappresentante il momento della coppia.

Nella Statica il torsore dinamico costituisce la più semplice struttura attraverso la quale definire un insieme di forze.

L'asse del torsore, associato ad un *passo p* tale che

$$p\vec{R} = \vec{M}_O, \quad (2.2)$$

può essere considerato quale entità geometrica denominata *screw*.

L'altra importante scoperta, dovuta a G.G. Mozzi [31], consente di equiparare qualsiasi atto di moto rigido ad una rotazione istantanea, attorno ad un asse (linea) L e definita da una velocità angolare  $\vec{\omega}$ , e ad una traslazione con velocità  $\vec{v}_E$  parallelo ad esso.

Anche in questo caso la posizione di L è univoca.

<sup>1</sup>L'entità in questione fu da Battaglini originariamente denominata *dinami* [5] e da R.S. Ball *wrench*[3].

Il moto più generale di un corpo viene quindi assimilato a quello di una vite su una madrevite avente *passo*  $p$  tale che

$$p\vec{\omega} = \vec{v}_E .$$

Per definire un atto di moto rigido viene introdotto un *torsore cinematico istantaneo*, anche detto *velocity screw* o *twist*

$$\{\tau_E\} \equiv \left\{ \begin{array}{c} \vec{\omega} \\ \vec{v}_E \end{array} \right\} \quad (2.3)$$

entità costituita da:

- il vettore velocità angolare  $\vec{\omega}$ , diretto lungo l'asse  $L$  del moto elicoidale istantaneo;
- il vettore velocità  $\vec{v}_E$  anch'esso diretto lungo  $L$ .

Attraverso  $\{\tau_E\}$  riusciamo a definire il campo di velocità elicoidale dei punti del corpo rigido non appartenenti ad  $L$ .

I comuni elementi tra la Statica e la Cinematica appena discussi consentono di studiare in maniera unificata tanto le proprietà dell'equilibrio dei corpi, quanto quelle degli atti di moto rigidi.

Le analogie in queste due branche della Meccanica vengono altresì formalmente messe in luce dalle seguenti relazioni:

- tra momenti

$$\vec{M}_A = \vec{M}_O + \vec{AO} \times \vec{R} \quad (2.4)$$

che consente di calcolare come varia il momento spostando il punto di riduzione delle forze da  $O$ , punto appartenente ad  $L$ , ad  $A$ ;

- tra velocità

$$\vec{v}_A = \vec{v}_E + \vec{AE} \times \vec{\omega} , \quad (2.5)$$

che definisce la velocità di un generico punto  $A$  del corpo mobile.

La teoria dei torsori è dunque un formalismo consente di stabilire importanti proprietà tanto nella Statica che nella Cinematica.

## 2.2 Somma di torsori

Siano

$$\{\tau_1\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\omega}_1 \\ \vec{v}_1 \end{array} \right\} , \quad \{\tau_2\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\omega}_2 \\ \vec{v}_2 \end{array} \right\} \quad (2.6)$$

due torsori cinematici, di passo  $p_1$  e  $p_2$  ed assi  $\vec{h}_1$  e  $\vec{h}_2$ , rispettivamente, di cui si vuole determinare il versore somma.

Per far corrispondere a tale operazione un significato fisico immaginiamo che  $\{\tau_1\}$  e  $\{\tau_2\}$  siano torsori relativi a due atti di moto imposti ad un corpo rigido. Si vuole determinare il risultante di tali torsori.

Quando il corpo è soggetto a  $\{\tau_1\}$  il generico punto  $M \equiv \{ M_x \ M_y \ M_z \}^T$  dell'asse centrale del moto risultante è soggetto ad una velocità di modulo

$$\vec{v}_1 = \vec{\omega}_1 p_1 + \vec{\omega}_1 \times \vec{d}_1 \quad (2.7)$$

con  $\vec{d}_1$  vettore della minima distanza tra  $\vec{h}_1$  e  $P$ . Osservando che i termini che compaiono nella (2.7) sono ortogonali, il modulo di  $\vec{v}_1$  vale

$$v_1 = \omega_1 \sqrt{p_1^2 + d_1^2} . \quad (2.8)$$

Analogamente, sotto l'azione di  $\{\tau_2\}$ , indicato con  $\vec{d}_2$  vettore della minima distanza tra  $\vec{h}_2$  e  $M$ , la velocità di  $M$  vale

$$\vec{v}_2 = \vec{\omega}_2 p_2 + \vec{\omega}_2 \times \vec{d}_2, \quad (2.9)$$

con modulo pari a

$$v_2 = \omega_2 \sqrt{p_2^2 + d_2^2}. \quad (2.10)$$

Pertanto, sotto l'azione simultanea di  $\{\tau_1\}$  e  $\{\tau_2\}$  la velocità risultante di  $M$  sarà

$$\vec{v}_M = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \quad (2.11)$$

mentre l'atto di moto rigido avrà una velocità angolare

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2. \quad (2.12)$$

Del torsore  $\{\tau\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\omega} \\ \vec{v} \end{array} \right\}$ , relativo all'atto di moto risultante, determineremo il passo  $p$  e la posizione dell'asse centrale  $\vec{h}$ .

Applicando il teorema di Carnot si ottiene il quadrato del modulo di  $\vec{v}_M$

$$v_M^2 = \omega_1^2 (p_1^2 + d_1^2) + \omega_2^2 (p_2^2 + d_2^2) + 2\sqrt{p_1^2 + d_1^2} \sqrt{p_2^2 + d_2^2} \omega_1 \omega_2 \cos \phi. \quad (2.13)$$

essendo  $\phi$  l'angolo tra  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$ .

Tale quantità può anche esprimersi attraverso l'espressione

$$v_M^2 = p^2 \omega^2 = p^2 (\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_1 \omega_2 \cos \gamma). \quad (2.14)$$

Il confronto della (2.13) con quest'ultima porge

$$\begin{aligned} p^2 &= \frac{\omega_1^2 (p_1^2 + d_1^2) + \omega_2^2 (p_2^2 + d_2^2) + 2\sqrt{p_1^2 + d_1^2} \sqrt{p_2^2 + d_2^2} \omega_1 \omega_2 \cos \phi}{\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_1 \omega_2 \cos \gamma} \\ &= \frac{(p_1^2 + d_1^2) + \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} (p_2^2 + d_2^2) + 2\sqrt{p_1^2 + d_1^2} \sqrt{p_2^2 + d_2^2} \frac{\omega_2}{\omega_1} \cos \phi}{1 + \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} + 2\frac{\omega_2}{\omega_1} \cos \gamma} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Poiché  $M$  appartiene all'asse centrale dovrà essere

$$\vec{\omega} \times \vec{v}_M = 0. \quad (2.16)$$

Sostituite in quest'ultima le (2.11) e (2.12) avremo

$$\begin{aligned} &(\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) \times (\vec{\omega}_2 p_2 + \vec{\omega}_2 \times \vec{d}_2 + \vec{\omega}_1 p_1 + \vec{\omega}_1 \times \vec{d}_1) \\ &= \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2 p_2 + \vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{d}_2) + \vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{d}_1) \\ &\quad + \vec{\omega}_2 \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{d}_2) + \vec{\omega}_2 \times \vec{\omega}_1 p_1 + \vec{\omega}_2 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{d}_1) \\ &= \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2 p_2 + (\vec{\omega}_1 \cdot \vec{d}_2) \vec{\omega}_2 - (\vec{\omega}_1 \cdot \vec{\omega}_2) \vec{d}_2 + (\vec{\omega}_1 \cdot \vec{d}_1) \vec{\omega}_1 - (\vec{\omega}_1 \cdot \vec{\omega}_1 \vec{d}_1) \\ &\quad + (\vec{\omega}_2 \cdot \vec{d}_2) \vec{\omega}_2 - (\vec{\omega}_2 \cdot \vec{\omega}_2) \vec{d}_2 + \vec{\omega}_2 \times \vec{\omega}_1 p_1 + (\vec{\omega}_2 \cdot \vec{d}_1) \vec{\omega}_1 - (\vec{\omega}_2 \cdot \vec{\omega}_1) = 0 \end{aligned}$$

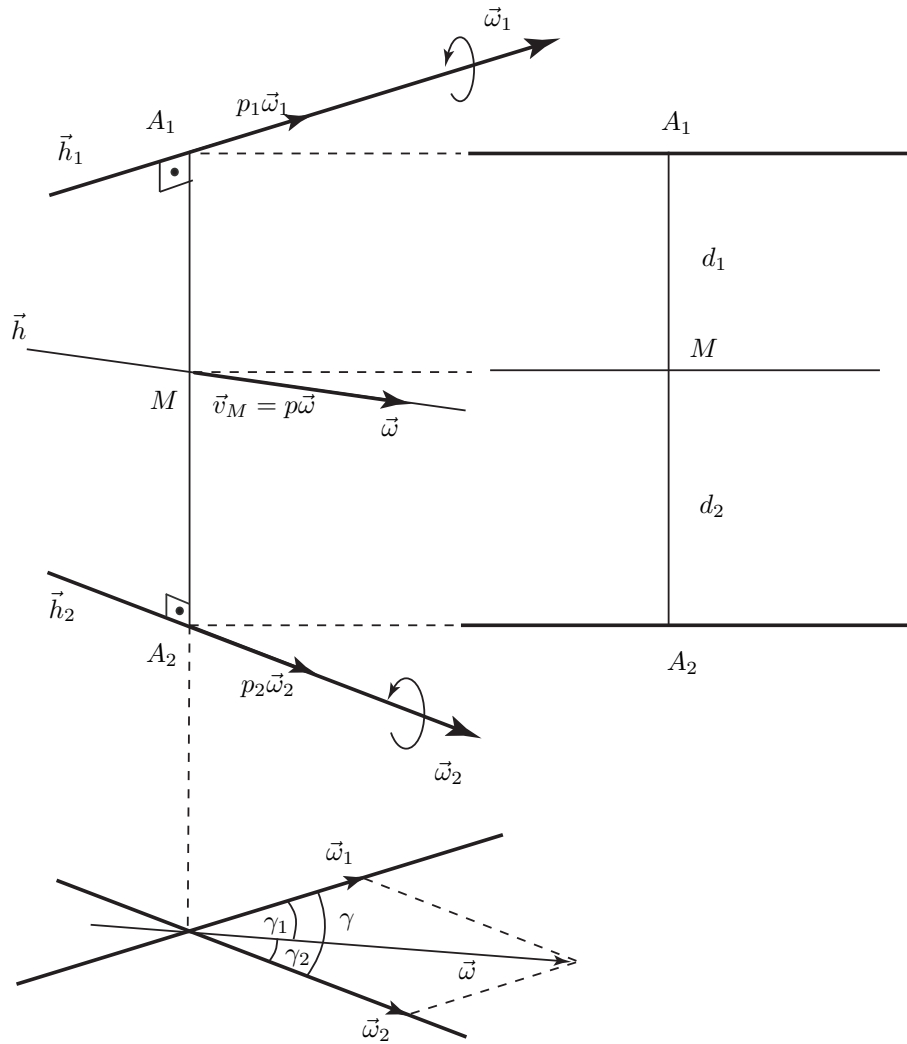
in cui i termini non nulli avranno la direzione della minima distanza tra gli assi  $\vec{h}_1$  e  $\vec{h}_2$ .

Detto  $\gamma$  l'angolo tra  $\vec{h}_1$  e  $\vec{h}_2$ , la direzione dell'asse  $\vec{h}$  del torsore risultante si ottiene dalle condizioni

$$\frac{\omega_2}{\sin \gamma_1} = \frac{\omega_1}{\sin \gamma_2} \quad (2.17a)$$

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 \quad (2.17b)$$

quali discendono dalla geometria della Figura 2.1.



**Figura 2.1:** Composizione di atti di moto rotatori: Nomenclatura

Tenuto conto che i vettori  $\vec{d}_1$  e  $\vec{d}_2$  sono paralleli e normali al prodotto  $\vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2$ , sarà<sup>2</sup>

$$\omega_1 \omega_2 \sin \gamma (p_1 - p_2) - \omega_1 \omega_2 \cos \gamma (d_1 + d_2) - d_1 \omega_1^2 - d_2 \omega_2^2 = 0, \quad (2.18a)$$

relazione da considerare unitamente alla

$$d_1 - d_2 = d. \quad (2.18b)$$

<sup>2</sup>Il verso positivo di  $d_1$  e  $d_2$  è quello dal quale si osserva  $\vec{\omega}_2$  sovrapporsi ad  $\vec{\omega}_1$  tramite una rotazione antioraria.

Le (2.18) costituiscono un sistema nelle incognite  $d_1$  e  $d_2$  la cui soluzione porge

$$d_1 = \frac{\omega_2 [\omega_1 \sin \gamma (p_1 - p_2) + d (\omega_1 \cos \gamma + \omega_2)]}{\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_1\omega_2 \cos \gamma}, \quad (2.19a)$$

$$d_2 = \frac{\omega_1 [\omega_2 \sin \gamma (p_1 - p_2) + d (\omega_1 \cos \gamma + \omega_2)]}{\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_1\omega_2 \cos \gamma}. \quad (2.19b)$$

### Esempio numerico

Con riferimento alla Figura 2.2 siano assegnati i seguenti torsori

$$\{\tau_1\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\omega}_1 \\ p_1 \vec{\omega}_1 \end{array} \right\}, \quad \{\tau_2\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\omega}_2 \\ p_2 \vec{\omega}_2 \end{array} \right\}$$

con

$$\vec{\omega}_1 = \{ 0 \quad 0 \quad 1 \}^T, \quad \vec{\omega}_2 = \left\{ 0 \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}^T,$$

$p_1 = 1$ ,  $p_2 = 2$  e sia  $d = 3$  la minima distanza tra gli assi dei torsori. Si calcoli il torsore somma.

L'applicazione delle (2.12) (2.15), (2.17), (2.19) rispettivamente fornisce:

- $\vec{\omega} = \left\{ 0 \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \right\}^T$ ;
- $p = 2.12$ ;
- $\gamma_1 = \gamma_2 = 22.5^\circ$ ;
- $d_1 = 1.29$ ,  $d_2 = -1.71$ .

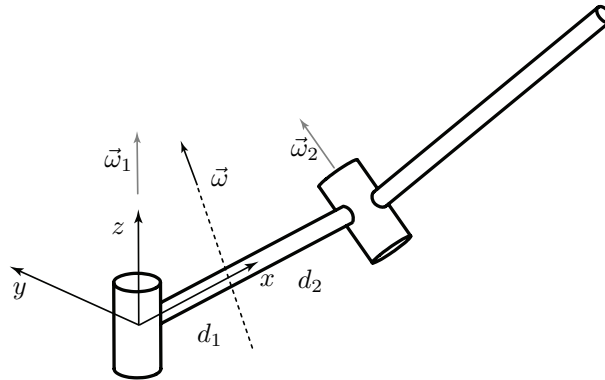


Figura 2.2: Nomenclatura

## 2.3 Il cilindroide

Anche in questo caso per la composizione dei torsori faremo riferimento ai torsori cinematici, sebbene ad analoghe conclusioni si giungerebbe operando su torsori dinamici.

In particolare si vuole determinare il torsore cinematico  $\{\tau\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\omega} \\ \vec{v} \end{array} \right\}$  la cui applicazione ad un corpo produce le medesime condizioni di moto dei torsori cinematici

$$\{\tau_1\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\omega}_1 \\ \vec{v}_1 \end{array} \right\}, \quad \{\tau_2\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\omega}_2 \\ \vec{v}_2 \end{array} \right\} \quad (2.20)$$